به نام خداوند بخشنده مهربان

مدارهای منطقی

Digital Logic Circuits

جناب آقای دکتر حسین آقابابا

یاشار ابری

دانشکده مهندسی، دانشگاه تهران

Yasharabri.ut.ac.ir@gmail.com

yasharabri@ut.ac.ir

مدارهای منطق دیجیتال

- محاسبات دودویی (فصل ۱)

چرا محاسبات دودویی؟

- سخت‌افزار فقط می‌تواند با ارقام دودویی، یعنی ۰ و ۱، کار کند.
- باید تمام اعداد، اعم از صحیح یا اعشاری، مثبت یا منفی، با ارقام دودویی که بیت نامیده می‌شوند، نمایش داده شوند.
- می‌توان مدارهای الکترونیکی را برای انجام عملیات حسابی طراحی کرد: جمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی اعداد دودویی.

اعداد صحیح مثبت

- سیستم اعشاری: متشکل از ۱۰ رقم، {0,1,2, . . . , 9}

$$41 = 4\times10^1 + 1\times10^0$$
$$255 = 2\times10^2 + 5\times10^1 + 5\times10^0$$

- سیستم دودویی: متشکل از دو رقم، {۰،۱}

$$00101001 = 0\times2^7 + 0\times2^6 + 1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 0\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$$
$$= 32 + 8 + 1 = 41$$
$$11111111 = 255, \text{ largest number with 8 binary digits, } 2^8-1$$

- بزرگترین عدد با ۸ رقم دودویی

مبنا یا رادیکس

- در سیستم دسیمال (ده تایی یا ده دهی)، عدد ۱۰ مبنا یا رادیکس نامیده می‌شود.
- عدد دسیمال ۴۱ به صورت 41_{10} یا 41_{ten} نیز نوشته می‌شود. مبنا (رادیکس) برای سیستم دودویی ۲ است.

- بنابراین، $41_{ten} = 101001_2 \text{ or } 101001_{two}$
- همچنین، $111_{ten} = 1101111_{two}$

- در مورد اعداد منفی چطور؟

مقدار با علامت - کارهایی که نباید انجام دهید

- از نمایش دودویی با طول ثابت استفاده کنید
- از سمت چپ‌ترین بیت (که بیت باارزش‌ترین یا MSBنامیده می‌شود) برای علامت استفاده کنید:
  - ۰ برای مثبت
  - ۱ برای منفی

- مثال

$$+18_{ten} = 00010010_{two}$$
$$-18_{ten} = 10010010_{two}$$

مشکلات مربوط به علامت و مقدار

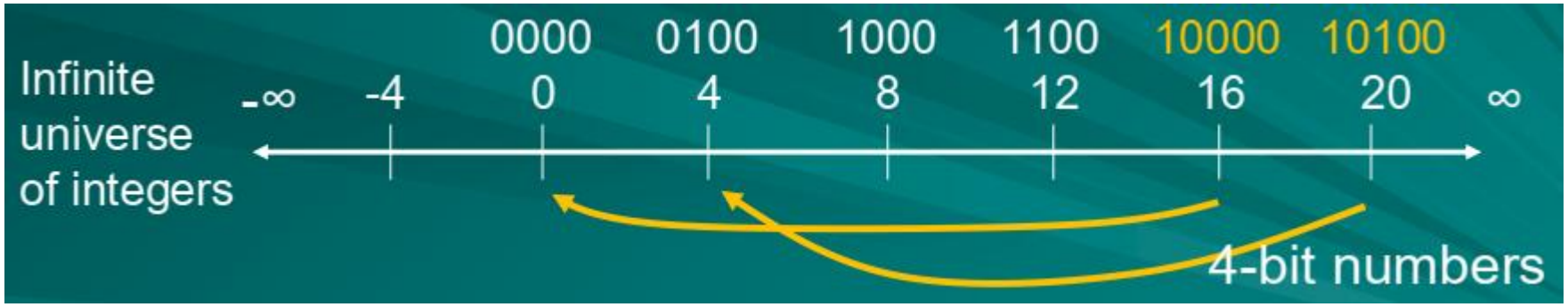
- در عملیات حسابی، باید با بیت‌های علامت و مقدار به طور متفاوتی رفتار شود.
- جمع و تفریق به مدارهای منطقی متفاوتی نیاز دارند.
- تشخیص سرریز دشوار است.
- «صفر» دو نمایش دارد:

$$+0_{ten} = 00000000_{two}$$
$$-0_{ten} = 10000000_{two}$$

- **اعداد صحیح با علامت در رایانه‌های مدرن استفاده نمی‌شوند.**

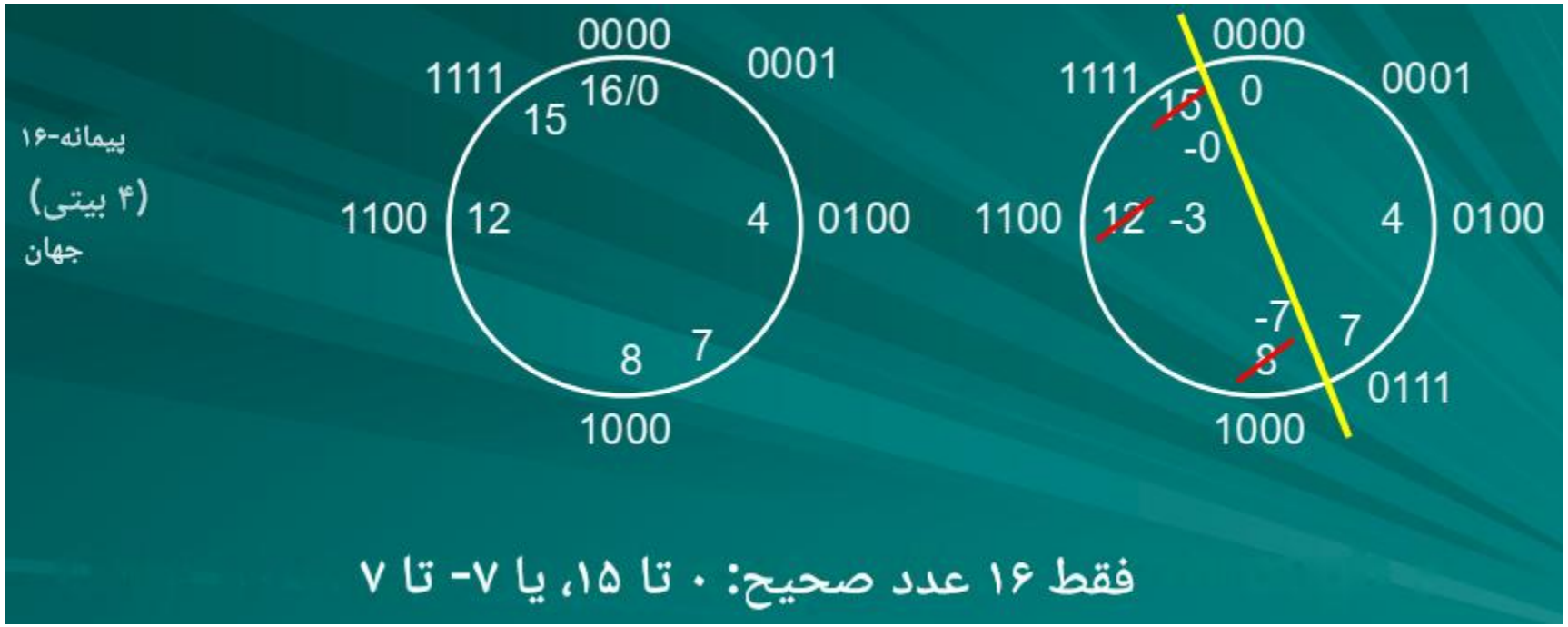
مشکلات مربوط به ریاضیات متناهی

- اندازه محدود نمایش:
  - مدار دیجیتال نمی‌تواند به طور دلخواه بزرگ باشد.
  - تشخیص سرریز – زمانی که عدد بیش از حد بزرگ می‌شود، تشخیص آن آسان است.

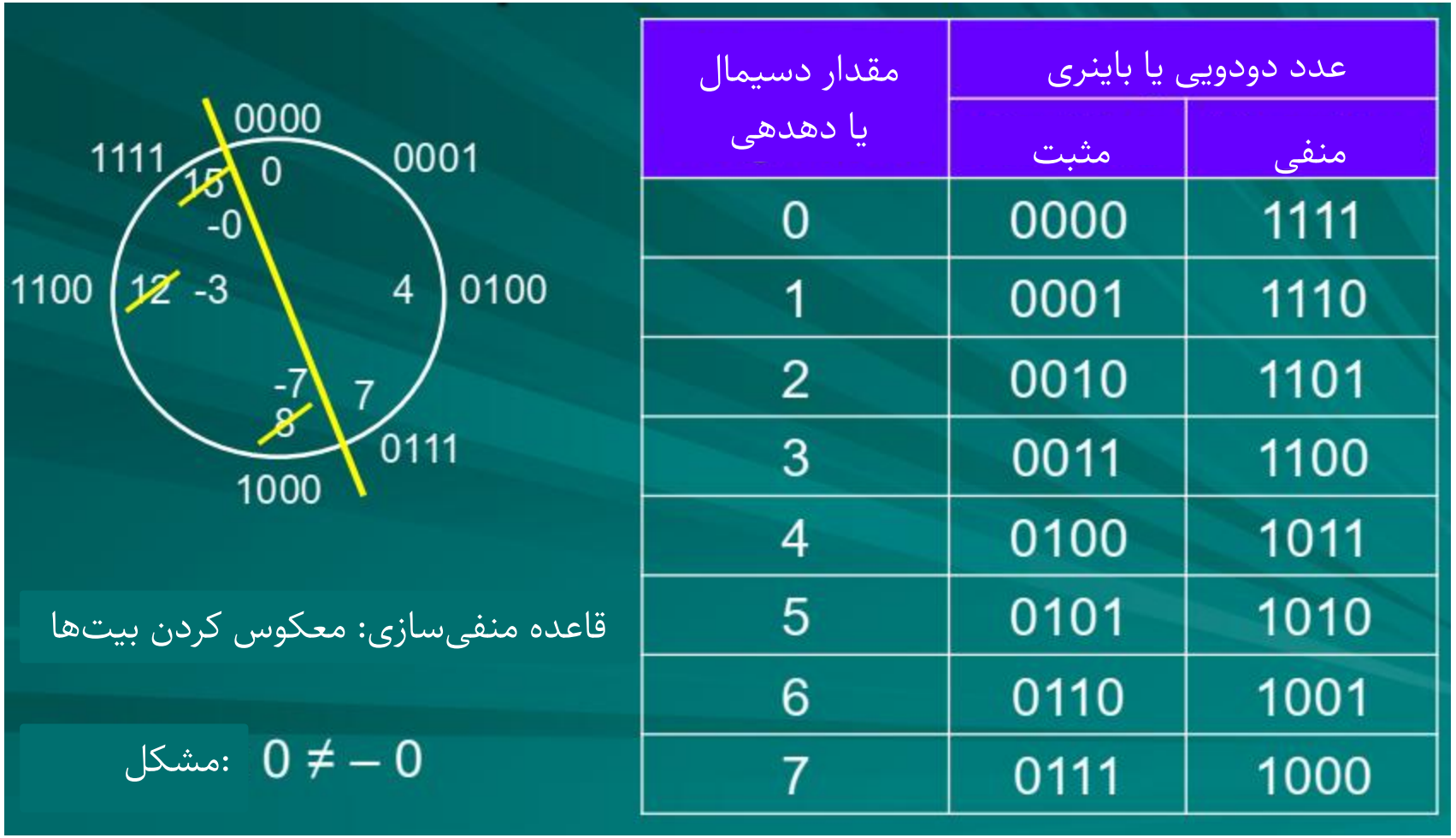


- دنیای بی‌نهایت اعداد صحیح
- نمایش اعداد منفی:
  - نمایش منحصر به فرد عدد ۰.

جهان ۴ بیتی

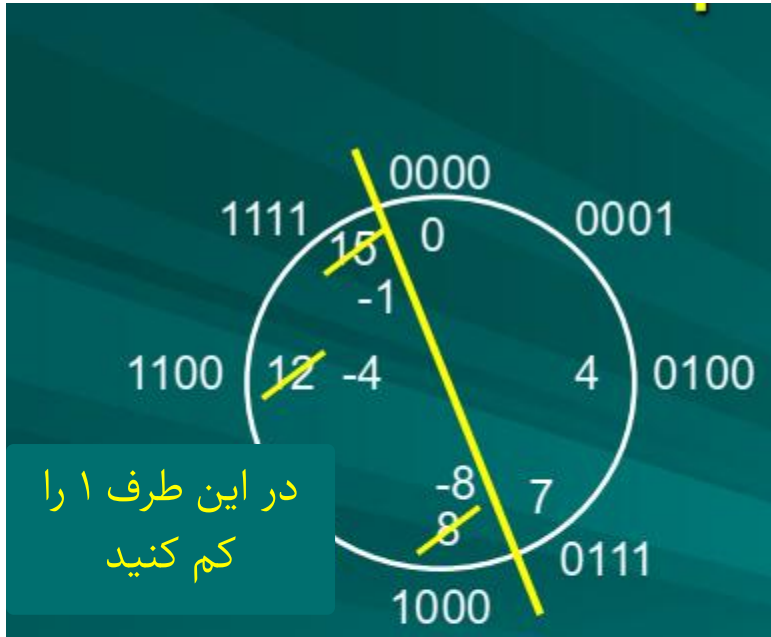

پیمانه-۱۶
(۴ بیتی)
جهان
0000
0001
0100
0111
1000
1100
1111
16/0
15
12
4
8
7
0
-0
-3
-7
فقط ۱۶ عدد صحیح: ۰ تا ۱۵، یا ۷- تا ۷

یک روش برای تقسیم اولین اعداد متمم جهان



مقدار دسیمال یا دهدهی	عدد دودویی یا باینری	
	مثبت	منفی
0	0000	1111
1	0001	1110
2	0010	1101
3	0011	1100
4	0100	1011
5	0101	1010
6	0110	1001
7	0111	1000

روش برای تقسیم دومین اعداد متمم جهان



مقدار دسیمال یا دهدهی	عدد دودویی یا باینری	
	مثبت	منفی
0	0000	
1	0001	1111
2	0010	1110
3	0011	1101
4	0100	1100
5	0101	1011
6	0110	1010
7	0111	1001
8		1000

اعداد صحیح با علامت - دو روش

- از نمایش با طول ثابت استفاده کنید، اما بیت علامت صریح وجود ندارد:
  - متمم ۱: برای تشکیل یک عدد منفی، هر بیت در عدد داده شده را متمم کنید.
  - متمم دو: برای تشکیل یک عدد منفی، با عدد داده‌شده شروع کنید، یک واحد از آن کم کنید و سپس هر بیت را متمم کنید، یا:
    - **ابتدا هر بیت را متمم کنید و سپس ۱ واحد به آن اضافه کنید.**
- متمم ۲ نمایش ترجیحی است.

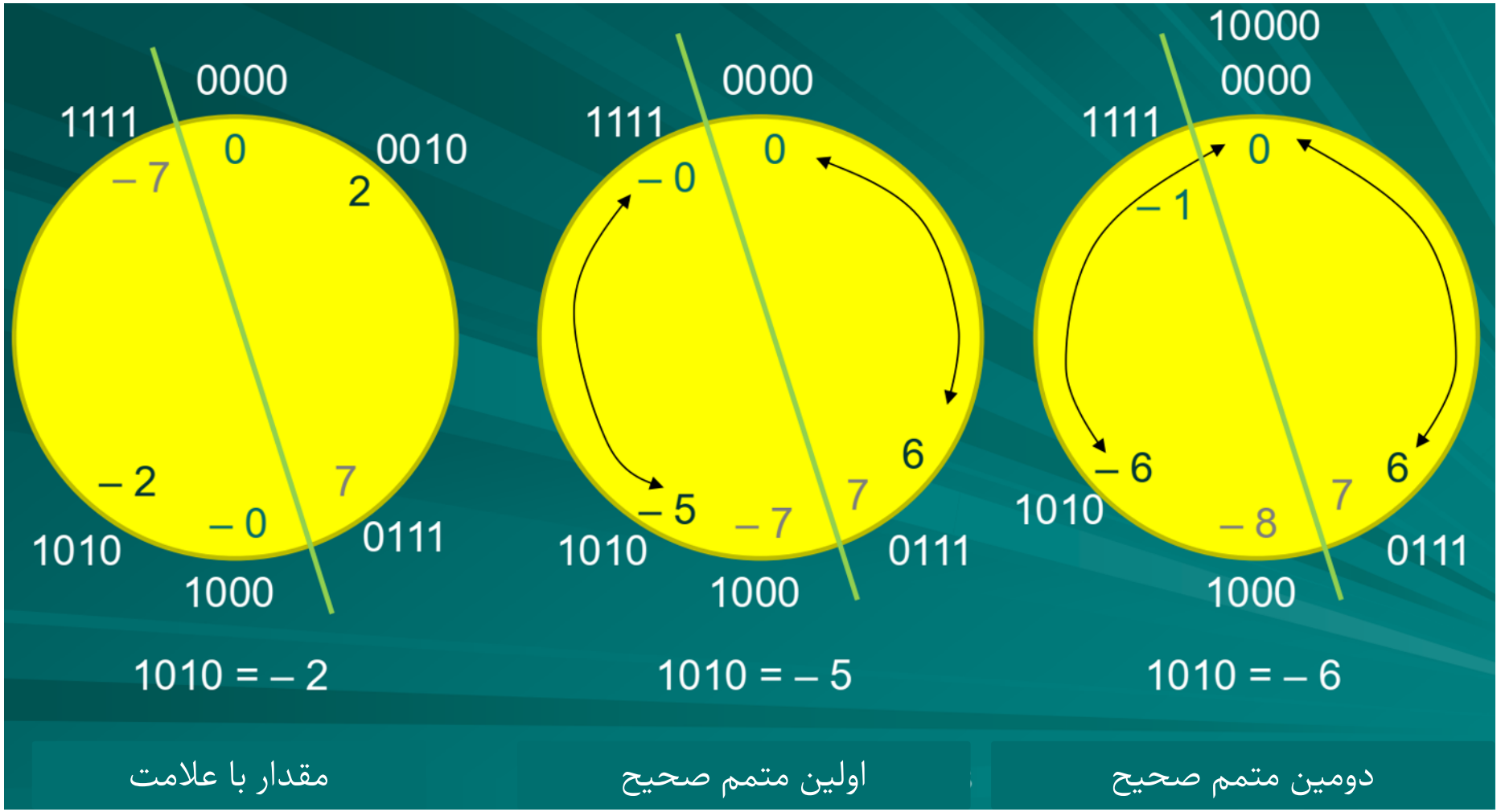
اعداد صحیح متمم دو

- چرا متمم ۱ نه؟ **دو صفر را دوست نداریم.**
- قانون منفی کردن:
  - ۱ را کم کنید و سپس بیت‌ها را معکوس کنید، یا
  - بیت‌ها را معکوس کنید و ۱ را اضافه کنید
- برخی از ویژگی‌ها:
  - فقط یک نمایش برای ۰ وجود دارد
  - تعداد اعداد مثبت دقیقاً برابر با تعداد اعداد منفی است
  - عدم تقارن جزئی - یک عدد منفی وجود دارد که معادل مثبت ندارد

روش عمومی برای نمایش اعداد صحیح دودویی (با علامت)

- تعداد بیت‌های نمایش (n) را انتخاب کنید.
- ۲^nعدد صحیح را به دو مجموعه تقسیم کنید:
  - اعداد از 00…0 تا 01…1 که شامل $2^n/2$ عدد صحیح مثبت هستند.
  - اعداد از 10…0 تا 11…1 که شامل $2^n/2$ عدد صحیح منفی هستند.
- قاعده معکوس کردن علامت (Negation rule)، اعداد منفی را به مثبت و برعکس تبدیل می‌کند:
  - در روش اندازه علامت‌دار (Signed magnitude): بیت باارزش (MSB) را معکوس کنید.
  - در روش متمم ۱ (اولین متمم): از مقدار $2^n - 1$ یا از رشته‌ای از یک‌ها (۱…۱) تفریق کنید (که همان معکوس کردن تمام بیت‌ها است).
  - در روش متمم ۲ (دومین متمم): از مقدار 2^n یا از 10…0 تفریق کنید (که همان متمم ۱ به‌علاوه ۱ است).

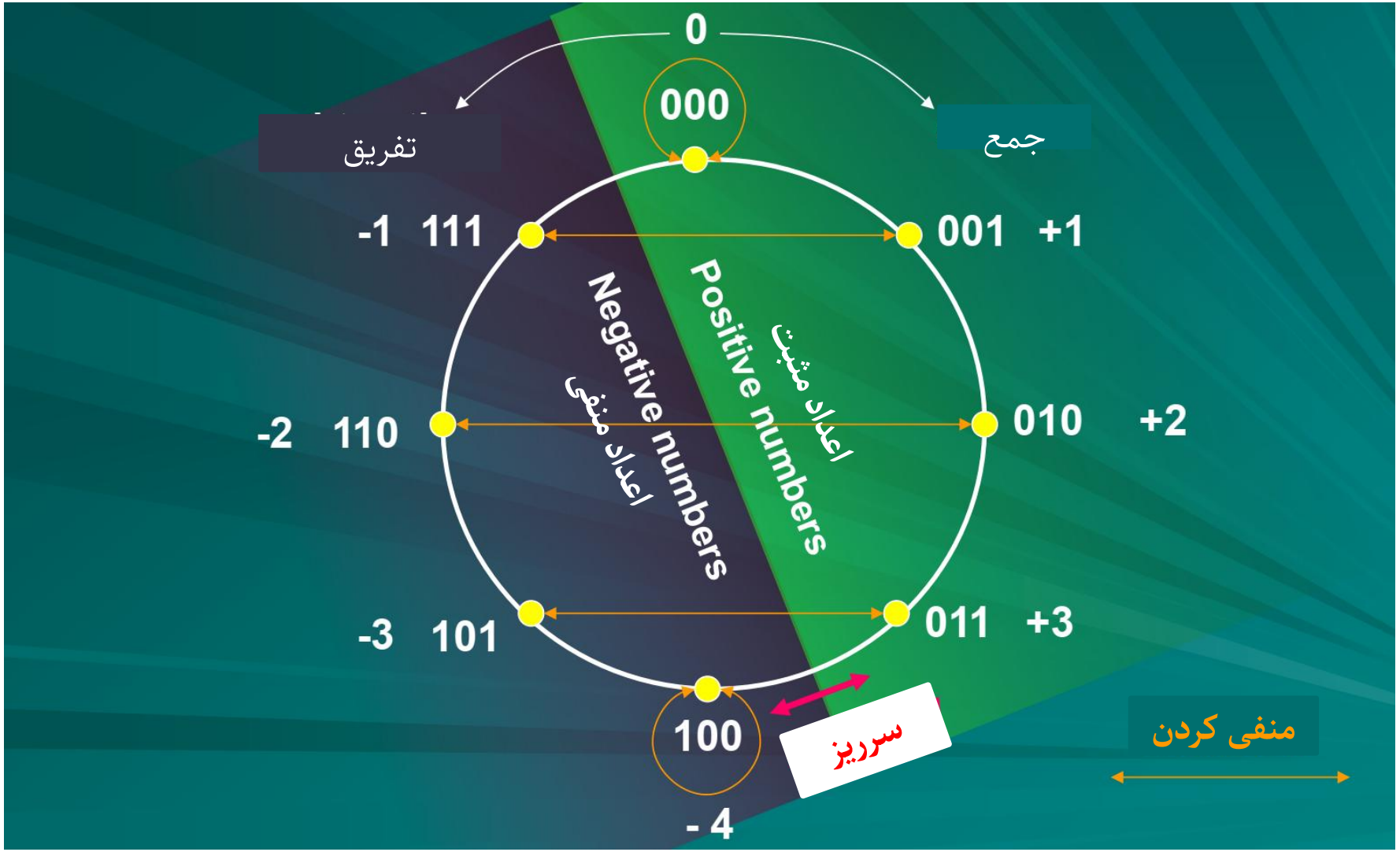
سه سیستم (n=۴)


0000
1111
0010
– 7
0
2
– 2
7
– 0
1010
0111
1000
1010 = – 2
مقدار با علامت
0000
1111
– 0
0
6
– 5
7
– 7
1010
0111
1000
1010 = – 5
اولین متمم صحیح
10000
0000
1111
0
– 1
– 6
6
7
1010
– 8
0111
1000
1010 = – 6
دومین متمم صحیح

سه نمایش

مقدار با علامت	اولین متمم صحیح	دومین متمم صحیح
Sign-magnitude	1’s complement	2’s complement
000 = +0	000 = +0	000 = +0
001 = +1	001 = +1	001 = +1
010 = +2	010 = +2	010 = +2
011 = +3	011 = +3	011 = +3
100 = - 0	100 = - 3	100 = - 4
101 = - 1	101 = - 2	101 = - 3
110 = - 2	110 = - 1	110 = - 2
111 = - 3	111 = - 0	111 = - 1
		(Preferred) ترجیحی

اعداد متمم ۲ (n=۳)



اعداد n-بیتی در سیستم متمم ۲

- بازه (Range): از -2^{n-1} تا $2^{n-1}-1$
- صفر منحصربه‌فرد: ۰۰۰۰۰۰۰۰...۰
- قاعده معکوس کردن علامت (Negation rule): به اسلاید ۱۱ یا ۱۳ (در شماره انگلیسی) مراجعه شود.
- گسترش طول بیت (Expansion of bit length): بیت سمت چپ (بیت علامت) را تا انتها تکرار کنید (بیت‌بسط/Sign Extension)؛ به عنوان مثال، عدد ۱۱۱۱۱۱۰۱ همچنان همان ۱۰۱ یا عدد ۳- است. همچنین، عدد ۰۰۰۰۰۰۱۱ همان ۰۱۱ یا عدد ۳ است.
- بیت باارزش (MSB): نشان‌دهنده علامت عدد است.
- قاعده سرریز (Overflow rule): اگر دو عدد با بیت علامت یکسان (هر دو مثبت یا هر دو منفی) با هم جمع شوند، سرریز تنها زمانی رخ می‌دهد که علامت نتیجه، مخالف آن‌ها باشد.
- قاعده تفریق (Subtraction rule): برای محاسبه A–B، عدد $-B$(معکوس B) را با Aجمع کنید.

خلاصه

- برای یک تعداد ارقام مشخص (n)، ما یک مجموعه محدود از اعداد صحیح داریم. به عنوان مثال، در نمایش‌های ۳ رقمی، ما $10^3 = 1,000$ عدد صحیح در مبنای ده و $2^3 = 8$ عدد صحیح در مبنای دو داریم.
- ما این مجموعه محدود از اعداد صحیح $[0, r^n - 1]$ را (که در آن مبنا r برابر با ۱۰ یا ۲ است) به دو بخش مساوی تقسیم می‌کنیم که نشان‌دهنده اعداد مثبت و منفی هستند.
- اعداد مثبت و منفی با قدر (اندازه) یکسان، متمم یکدیگر هستند:

$$x + \text{complement}(x) = 0$$

خلاصه: تعریف متمم (Summary: Defining Complement)

- اعداد صحیح در مبنای ده:
  - متمم ۱۰: $10\text{'s complement: } -x = \text{Complement}(x) = 10^n - x$
  - متمم ۹: $9\text{'s complement: } -x = \text{Complement}(x) = 10^n - 1 - x$
    - برای به دست آوردن متمم ۹، از هر رقم، عدد ۹ را کم کنید.
    - برای به دست آوردن متمم ۱۰، عدد ۱ را به متمم ۹ اضافه کنید.
- اعداد صحیح در مبنای دو (باینری):
  - متمم ۲: $2\text{'s complement: } -x = \text{Complement}(x) = 2^n - x$
  - متمم ۱: $1\text{'s complement: } -x = \text{Complement}(x) = 2^n - 1 - x$
    - برای به دست آوردن متمم ۱، از هر رقم، عدد ۱ را کم کنید (معکوس کردن بیت‌ها).
    - برای به دست آوردن متمم ۲، عدد ۱ را به متمم ۱ اضافه کنید.