به نام خداوند بخشنده مهربان

مدارهای منطقی

Digital Logic Circuits

جناب آقای دکتر حسین آقابابا

یاشار ابری

دانشکده مهندسی، دانشگاه تهران

Yasharabri.ut.ac.ir@gmail.com

yasharabri@ut.ac.ir

بازبینی نکات برای آمادگی در امتحان

- در ادامه می‌پردازیم

ارزش مکانی در سیستم‌های عددی

- **مفهوم پایه ارزش مکانی:** ارزش هر رقم در یک عدد نه تنها به خود رقم، بلکه به جایگاه یا موقعیت آن در آن عدد بستگی دارد که در پایه‌های مختلف (مثل ۱۰ یا ۲) بر اساس توان‌های پایه سیستم ضرب می‌شود.
- **پایه سیستم عددی (Radix):** تعداد کل رقم‌های مجاز در یک سیستم است؛ مثلاً در مبنای ۱۰ رقم‌های ۰ تا ۹ و در مبنای ۲ رقم‌های ۰ و ۱ استفاده می‌شوند.
- **محاسبه مقدار کلی:** هر عدد به صورت مجموع حاصل‌ضرب هر رقم در (پایه به توان شماره جایگاه آن رقم از راست شروع از صفر) محاسبه می‌گردد.
- **مثال کاربردی:** در عدد ۱۲۳در مبنای ۱۰، رقم ۳در ۱۰^۰، رقم ۲در ۱۰^۱و رقم ۱در ۱۰^۲ضرب می‌شود که مجموع آن‌ها همان ۱۲۳است.

حضرت امام حسن عسکری علیه السلام: هیچ کسی را به گونه‌ای احترام مکن که او را به رنج و مشقت بیفکنی. بحار، جلد۷۸، صفحه۳۷۴

تبدیل عدد دهدهی (مبنای ۱۰) به مبنای ۲، ۸ و ۱۶

- **روش تقسیم‌های متوالی:** برای تبدیل یک عدد صحیح دهدهی به هر مبنای دلخواه ("۲"، "۸"یا "۱۶")، عدد را به طور متوالی بر پایه جدید تقسیم می‌کنیم تا خارج قسمت به صفر برسد.
- **استفاده از باقی‌مانده‌ها:** باقی‌مانده‌های به دست آمده از راست به چپ (از آخرین به اولین باقی‌مانده) ارقام عدد در مبنای جدید را تشکیل می‌دهند.
- **نکات مبنای ۱۶ (هگزادیسمال):** در این مبنا ارقام ۱۰ تا ۱۵ با حروف انگلیسی A تا F نمایش داده می‌شوند؛ بنابراین باقی‌مانده‌های ۱۰ تا ۱۵ باید به حروف متناظر تبدیل شوند.
- جدول تبدیل سریع مقادیر پایه:

حضرت امام مهدی عجل الله تعای فرجه الشریف: برای تعجیل فرج زیاد دعا کنید، چون همین دعا موجب فرج شماست.
منتخب‌الاثر، ص۲۶۸

تبدیل عدد دهدهی (مبنای ۱۰) به مبنای ۲، ۸ و ۱۶

دهدهی (10)	باینری (2)	هشت‌هشتی (8)	هگزادیسمال (16)
۱۰	1010	12	A
۱۵	1111	17	F

حضرت امام موسی کاظم علیه‌السلام: تجربه‌ها برای ادب کردن و گذشت روزها برای موعظه و پند کافی است.

حیاة امام کاظم علیه‌السلام، ج۱، ص۲۵۶

تبدیل عدد باینری (مبنای ۲) به مبنای ۱۰ و ۱۶

- **تبدیل باینری به دهدهی:** با استفاده از ارزش مکانی و ضرب هر بیت (۰ یا ۱) در توان‌های متناظر پایه ۲ (دو به توان صفر، دو به توان ۱، دو به توان ۲ و...) و جمع کردن آن‌ها انجام می‌شود.
- **تبدیل باینری به هگزادیسمال (۱۶):** ارقام باینری را از سمت راست به دسته‌های چهارتایی (تایبل) تقسیم می‌کنیم؛ اگر تعداد بیت‌ها کامل نبود، در سمت چپ صفر اضافه می‌کنیم و هر دسته را به معادل هگزادیسمال آن تبدیل می‌کنیم.
- **اهمیت این تبدیل‌ها:** چون مبنای ۱۶ به راحتی به باینری نگاشت می‌شود، مهندسان کامپیوتر برای خواندن کدهای طولانی باینری از هگزادیسمال استفاده می‌کنند.

حضرت امیرالمومنین علی بن ابی طالب صلوات‌الله‌علیه‌و آله: به خدا سوگند فاطمه مرا هیچ‌گاه خشمگین نکرد و در هیچ کاری از من سرپیچی ننمود.
بحار، ج۴۳، ص۱۳۴

تبدیل عدد باینری اعشاری به مبنای ۱۰ و ۱۶

- **بخش صحیح و اعشاری:** در اعداد اعشاری باینری، بخش صحیح به روش معمولی توان‌های مثبت ($۲^{0}, ۲^{1}, \dots$) و بخش اعشاری به کمک توان‌های منفی ($۲^{-1}, ۲^{-2}, \dots$) به مبنای ۱۰ تبدیل می‌شوند.
- **تبدیل بخش اعشاری به مبنای ۱۰:** هر بیت اعشاری را در مقادیر معادل آن (۰.۵,۰.۲۵,۰.۱۲۵ و...) ضرب کرده و با هم جمع می‌کنیم.
- **تبدیل باینری اعشاری به مبنای ۱۶:** برای بخش صحیح از سمت راست دسته‌های چهارتایی و برای بخش اعشاری از سمت چپ دسته‌های چهارتایی می‌سازیم (در صورت نیاز با صفر پر کردن).
- **نکته آموزشی:** در تبدیل اعشاری، دقت کنید که سمت ممیز مرز جداکننده توان‌های مثبت و منفی در محاسبه ارزش مکانی است.

حضرت صدیقه کبری فاطمه الزهرا سلام‌الله‌علیها: خدایا! گفتار و کردار توبه‌کاران و رستگاری و پاداش مجاهدان را از تو می‌طلبم.
فلاح سائل، ص ۳۱۲

جمع و تفریق باینری

- **قوانین جمع ساده باینری:** قواعد جمع بیت‌ها شامل $0+0=0$ ، $0+1=1$ ، $1+1=10$ (صفر با یک انتقال یا Carry) و $1+1+1=11$ (یک با یک انتقال) است.
- **انجام عملیات جمع:** ستون به ستون از سمت راست به چپ عمل می‌کنیم و بیت‌های نقلی (Carry) را به ستون بعدی انتقال می‌دهیم.
- **تفریق باینری با وام‌گیری:** مشابه تفریق اعشاری است؛ زمانی که بخواهیم از ۰ عدد ۱ را کم کنیم، از ستون سمت چپ وام می‌گیریم (که معادل اضافه کردن ارزش پایه به رقم فعلی است).
- **روش جایگزین تفریق:** در سیستم‌های دیجیتال، تفریق عموماً به کمک جمع با استفاده از مفهوم «متمم‌ها» انجام می‌شود تا مدار سخت‌افزاری ساده‌تر شود.

امیرالمومنین علی بن ابی‌طالب صلوات‌الله‌علیه و آله:
من هر گاه فاطمه (سلام‌الله‌علیها) را می‌دیدم، تمام غم و غصه‌هایم برطرف می‌شد.
بحار، ج۴۳، ص۱۳۴

نمایش اعداد منفی (علامت و قدر مطلق، متمم ۱ و متمم ۲)

- **روش علامت و قدر مطلق (Sign-Magnitude):** پرارزش‌ترین بیت (چپ‌ترین بیت) نشان‌دهنده علامت است (۰ برای مثبت و ۱ برای منفی) و بقیه بیت‌ها مقدار عدد را نشان می‌دهند (مشکل: داشتن دو صفر مختلف: مثبت و منفی).
- **متمم ۱ (۱’s Complement):** برای منفی کردن یک عدد باینری، کافی است تمام بیت‌های آن را معکوس کنیم (صفرها یک و یک‌ها صفر شوند).
- **متمم ۲ (۲’s Complement):** استانداردترین روش رایج در کامپیوترها؛ ابتدا متمم ۱ عدد را به دست آورده و سپس یک واحد (+۱) به آن اضافه می‌کنیم.
- **مزیت متمم ۲:** مشکل دو صفر حل شده و عملیات جمع و تفریق اعداد مثبت و منفی با یک مدار سخت‌افزاری واحد به راحتی انجام می‌شود.

حضرت صدیقه کبری فاطمه زهرا سلام‌الله‌علیها: هر کس خدا را خالصانه عبادت کند، خداوند برترین مصلحت خود را نثارش می‌کند.
بحار، ج۷۰، ص۲۴۹

تفاوت سرریز نقلی (Carry) و سرریز علامت (Overflow)

- **سرریز نقلی (Carry):** به معنای انتقال اضافه از سمت چپ‌ترین بیت (خارج از محدوده‌ی بیت‌های تعیین‌شده برای اعداد بدون علامت Unsigned) است؛ یعنی ظرفیت تعداد بیت‌ها پر شده است.
- **سرریز علامت (Overflow):** در اعداد علامت‌دار (متمم ۲)، اگر حاصل جمع دو عدد مثبت، منفی شود یا دو عدد منفی، مثبت شود، سرریز علامت رخ داده و نتیجه نادرست است.
- **روش تشخیص Overflow:** از طریق بررسی بیت‌های نقلی ورودی و خروجی به بیت علامت (پرارزش‌ترین بیت)؛ اگر با هم برابر نباشند، سرریز رخ داده است.

حضرت امام حسن بن علی مجتبی علیه‌السلام: هلاکت و نابودی دین و دنیای هر شخص در ۳ چیز هست: تکبر، حرص، حسد.

اعیان الشیعة، ج۱، ص۵۵۷

تفاوت سرریز نقلی (Carry) و سرریز علامت (Overflow)

ویژگی	سرریز نقلی (Carry)	سرریز علامت (Overflow)
نوع اعداد	اعداد بدون علامت (Unsigned)	اعداد علامت‌دار (متمم۲ - Two’s Comp)
ملاک تشخیص	انتقال از بیت آخر به خارج	تغییر غیرمنسجم علامت نتیجه نسبت به ورودی‌ها

حضرت خاتم الانبیا محمد مصطفی صلی الله علیه و آله و سلم:

هر کس برادر خود را برای گناهی که از آن توبه کرده سرزنش کند نمی‌میرد تا خود آن گناه را مرتکب شود.

تنبیه الخواطر جلد ۱

صفحه ۱۱۳

اعداد منفی در دنیای واقعی: چرا کامپیوترها متمم ۲ را دوست دارند؟

- **چرا روش علامت و قدر مطلق کنار گذاشته شد؟** در روش ساده‌ی علامت و قدر مطلق، ما دو مدل «صفر» داشتیم: صفر مثبت (۰۰۰۰۰۰۰۰) و صفر منفی (۱۰۰۰۰۰۰۰) که پیاده‌سازی سخت‌افزاری آن در پردازنده‌ها بسیار گیج‌کننده و ناکارآمد بود.
- **جادوی متمم ۲ در سخت‌افزار:** با استفاده از متمم ۲، صفر تنها یک شکل دارد (۰۰۰۰۰۰۰۰) و از همه مهم‌تر، مدار الکترونیکی کامپیوتر برای «تفریق» نیاز به هیچ بخش جداگانه‌ای ندارد؛ تفریق تبدیل به همان «جمع» با عدد متمم‌شده می‌شود!
- **صرفه‌جویی میلیاردی در ترانزیستورها:** این ابتکار ریاضی ساده به طراحان تراشه اجازه داد تا پردازنده‌ها را با کمترین پیچیدگی، بیشترین سرعت و کمترین مصرف انرژی بسازند.
- **نکته جالب:** اگر بیت علامت در متمم ۲ برابر با ۱ باشد، عدد قطعا منفی است و ارزش مکانی آن بیت به صورت منفی (مثل -2^7) محاسبه می‌شود.

حضرت امیرالمومنین علی بن ابیطالب صلوات الله علیه و آله:
برای دوست خود خیرخواهی و یک رنگی‌ات را، برای آشنایان خود یاری‌ات را و برای عموم مردم خوشرویی‌ات را صرف کن.
غرر، حدیث ۲۴۶۶

فراتر از باینری: مبنای‌های آینده و چالش‌های محاسبات کوانتومی

- **محدودیت فیزیکی ترانزیستورها (پایان قانون مور):** با کوچک شدن اندازه‌ی تراشه‌ها به مقیاس اتمی، عبور الکترون‌ها و مدیریت بیت‌های صفر و یک (باینری) برای مهندسان سخت‌افزار روزبه‌روز دشوارتر می‌شود.
- **ورود کیوبیت‌ها (Qubits) در کامپیوترهای کوانتومی:** در محاسبات کوانتومی، دیگر محدود به صفر و یک مطلق نیستیم؛ پدیده‌ی «برهم‌نهی» (Superposition) به کیوبیت‌ها اجازه می‌دهد هم‌زمان در حالت‌های مختلفی از احتمالات وجود داشته باشند.
- **تغییر سیستم‌های عددی:** برخلاف کامپیوترهای کلاسیک که بر پایه‌ی مبنای ۲ کار می‌کنند، کامپیوترهای کوانتومی با بردارهای حالت و دامنه‌های احتمالات پیچیده (اعداد مختلط) سر و کار دارند.
- **آینده پردازش اطلاعات:** در حالی که هنوز پایه‌ی ساختار کامپیوترهای روزمره ما باینری و متمم ۲ است، فهم عمیق این صفر و یک‌ها پله‌ی اول درک فناوری‌های شگفت‌انگیز آینده مانند هوش مصنوعی و پردازش کوانتومی است.

حضرت صدیقه کبری فاطمه زهرا سلام الله علیها: خداوند کامل کردن پیمانه‌ها و ترازوها را برای زشت نشان دادن کم فروشی قرار داد.
من لایحضر، ج۳، ص۵۶۸

حضرت علی علیه السلام:

آنچه برای خود نمی‌پسندی، برای دیگران هم نپسند.

وَ اکرَه لَهُ ما تَکرَهُ لِنَفسِک

نامه ۳۱ نهج البلاغه

(نامه امیرالمومنین علی علیه السلام به امام حسن علیه السلام)



دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی کامپیوتر

با تشکر از حسن توجه شما