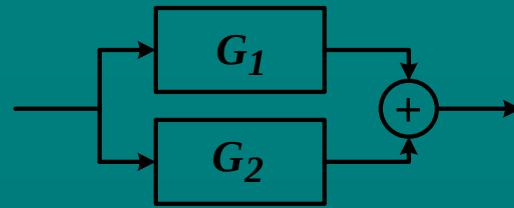


University
of Tehran



Faculty of
Engineering

An Introduction

Signals & Systems

Lecture 1

- بarm بندی

- مراجع

- مقدمه

- میان ترم: ۲۵ تا ۳۵ درصد
- پایان ترم: ۴۵ تا ۵۵ درصد
- تمرین و پروژه: ۱۰ تا ۲۰ درصد

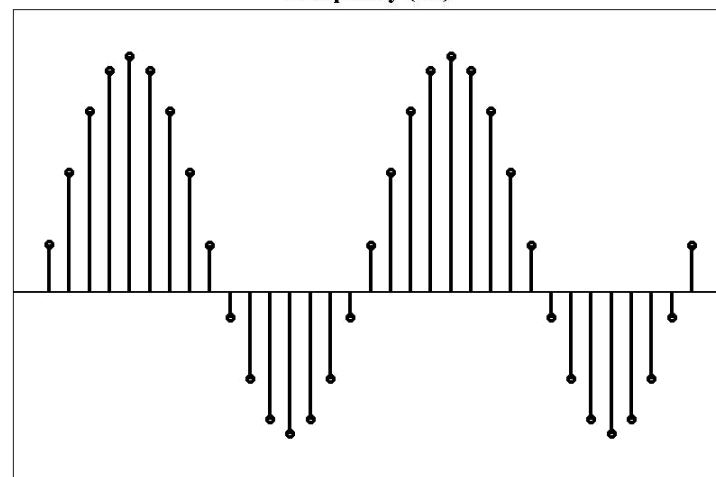
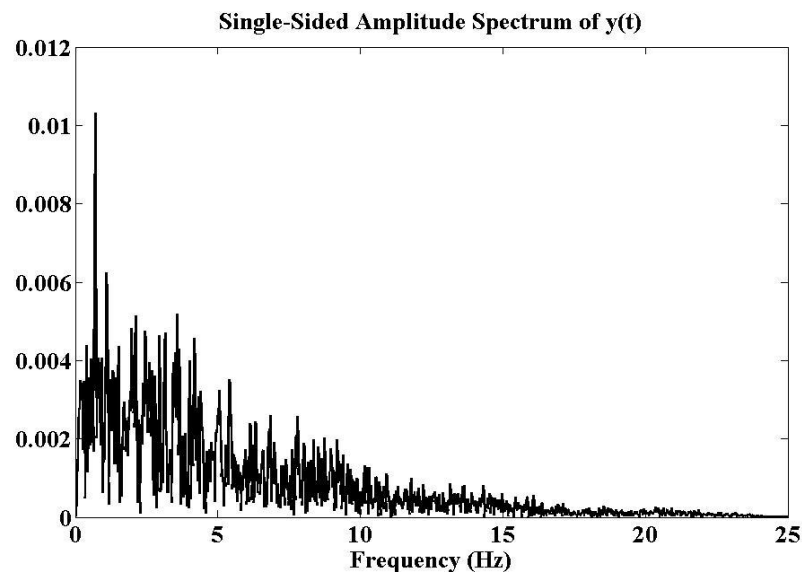
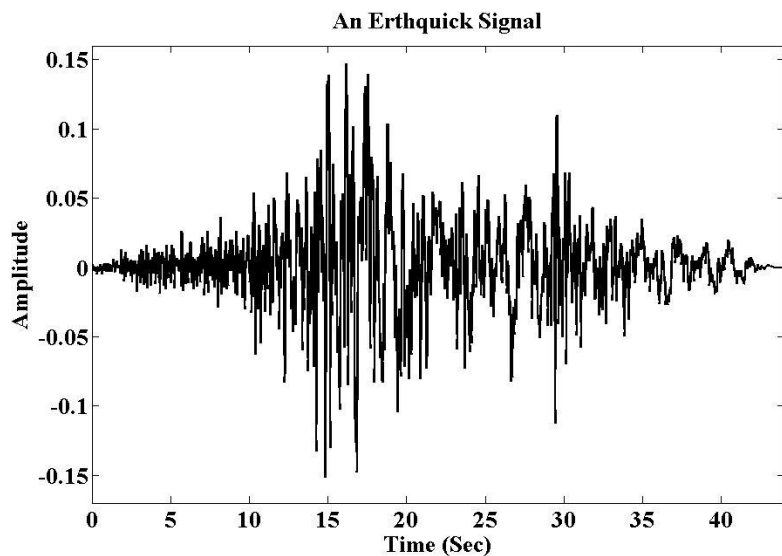
- سیگنال ها و سیستم ها، آپنهايم، ویرایش ۲ (۱۹۹۷)
- سیگنال ها و سیستم ها، هیکین (۱۹۹۹)
- سیگنال ها و سیستم های مدرن، کاواکرناک (۱۹۹۱)
- مقدمه ای بر سیگنال ها و سیستم ها، لیندینر (۱۹۹۹)

مقدمه

- سیگنال چیست؟
- تابعی از یک، دو و یا چند متغیر مستقل می باشد که حاوی اطلاعات مشخصی است.
- این متغیر مستقل می تواند زمان، فرکانس، رنگ های اصلی و ... باشد.
- در این درس، ما به بررسی سیگنال هایی خواهیم پرداخت که تنها تابعی از یک متغیر می باشند، به این سیگنال یک بعدی نیز گفته می شود.
- برای نمایش سیگنال های یک بعدی از دو محور عمود بر هم استفاده می شود. معمولاً متغیر مستقل را روی محور افقی و مقدار سیگنال را روی محور عمودی نمایش می دهند.
- در ادامه چند سیگنال نمونه نشان داده شده است.

Lec. 1

رئوس مطالب بارم بندی مراجع مقدمه



• دسته بندی سیگنال ها

– **سیگنال پیوسته**، سیگنالی است که برای تمام مقادیر حقیقی متغیر مستقل، مقدار داشته باشد. چنین سیگنالی را در حالت یک بعدی می توان به شکل زیر نمایش داد.

$$y(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

– به طور معمول، متغیر مستقل در چنین سیگنال هایی، زمان می باشد.

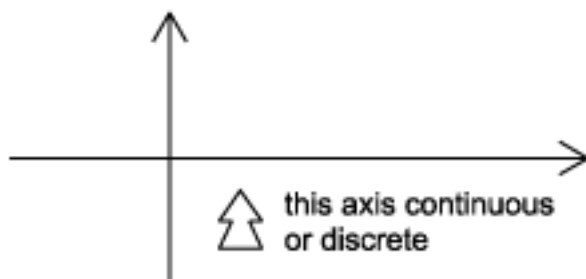
– **سیگنال گسسته**، این نوع سیگنال، به طور معمول با نمونه برداری از یک سیگنال پیوسته حاصل می شود. در این نوع سیگنال، متغیر مستقل قابل شمارش می باشد.

$$y[k] = f[k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

• به عبارت دیگر گسسته یا پیوسته بودن

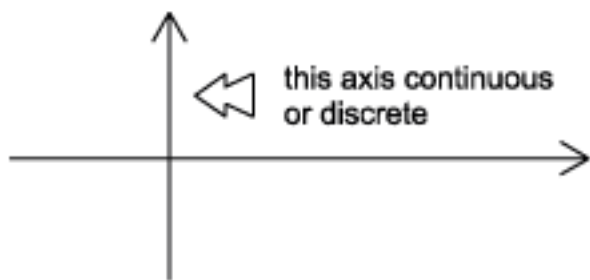
سیگنال بر اساس قابل شمارش بودن یا نبودن

متغیر مستقل روی محور افقی تعیین می گردد.



• سیگنال‌های آنالوگ و دیجیتال

- سیگنال آنالوگ، سیگنالی است که می‌تواند تمام مقادیر حقیقی را روی محور مربوط به متغیر وابسته را به خود بگیرد.
- سیگنال دیجیتال، سیگنالی است که تنها مقادیر مشخصی روی محور مربوط به متغیر وابسته به خود می‌گیرد. به عنوان یک سیگنال باینری، یک سیگنال دیجیتال خواهد بود.



• سیگنال‌های متناوب و غیرمتناوب

– سیگنال $x(t)$ را یک سیگنال پیوسته متناوب گویند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T وجود داشته باشد، بطوریکه شرط زیر را برای هر t فراهم سازد،

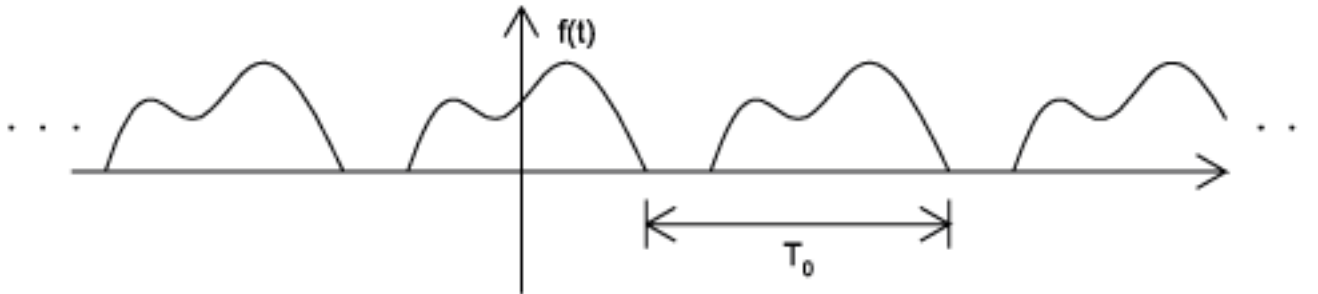
$$x(t + T) = x(t)$$

– کوچکترین T که می‌تواند شرط بالا را برآورده سازد، دوره تناوب اصلی نامیده می‌شود.

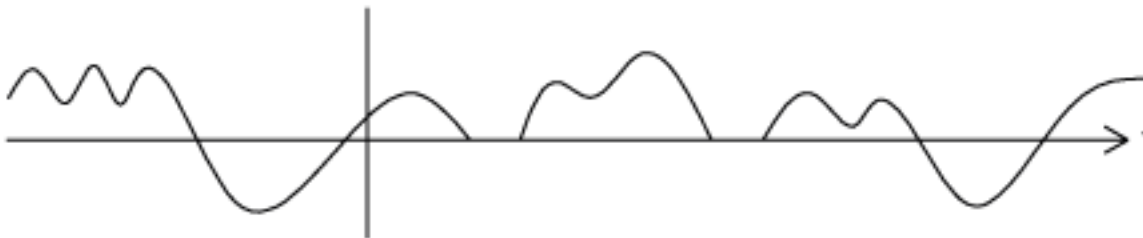
– سیگنال $x[k]$ را یک سیگنال گسسته متناوب گویند، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند N وجود داشته باشد، بطوریکه شرط زیر را برای هر k فراهم سازد،

$$x[k + N] = x[k]$$

– کوچکترین N که می‌تواند شرط بالا را برآورده سازد، دوره تناوب اصلی نامیده می‌شود.



نمونه یک سیگنال متناوب پیوسته



نمونه یک سیگنال غیرمتناوب پیوسته

- سیگنال‌های با طول محدود و طول نامحدود

– یک سیگنال را دارای طول محدود گویند که تنها روی یک یا چند بازه محدود مربوط به متغیر مستقل غیرصفر بوده و سایر مقادیر متغیر مستقل صفر باشد.

– یک سیگنال را دارای طول نامحدود گویند که به ازای تمام متغیر مستقل مقدار داشته باشد.

• سیگنال زوج و فرد:

– سیگنال $x(t)$ را سیگنال زوج گویند، هرگاه برای تمام مقادیر متغیر مستقل رابطه زیر برقرار باشد،

$$x(-t) = x(t)$$

– برای سیگنال‌های گسسته خواهیم داشت،

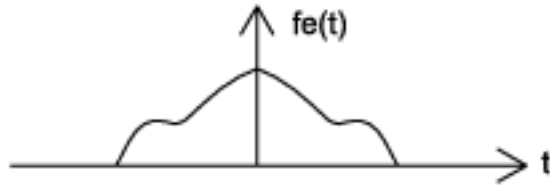
$$x[-k] = x[k]$$

– سیگنال $x(t)$ را سیگنال فرد گویند، هرگاه برای تمام مقادیر متغیر مستقل رابطه زیر برقرار باشد،

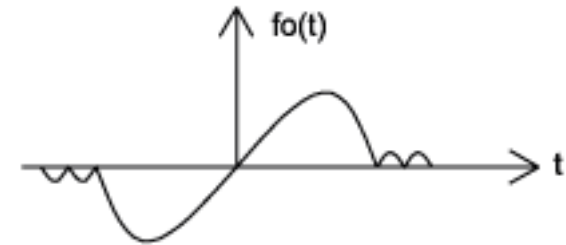
$$x(-t) = -x(t)$$

– برای سیگنال‌های گسسته خواهیم داشت،

$$x[-k] = -x[k]$$

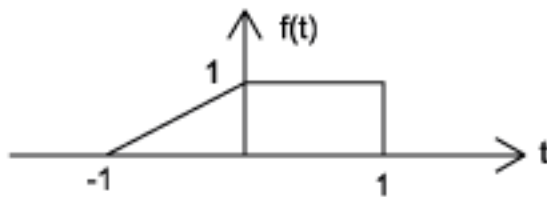


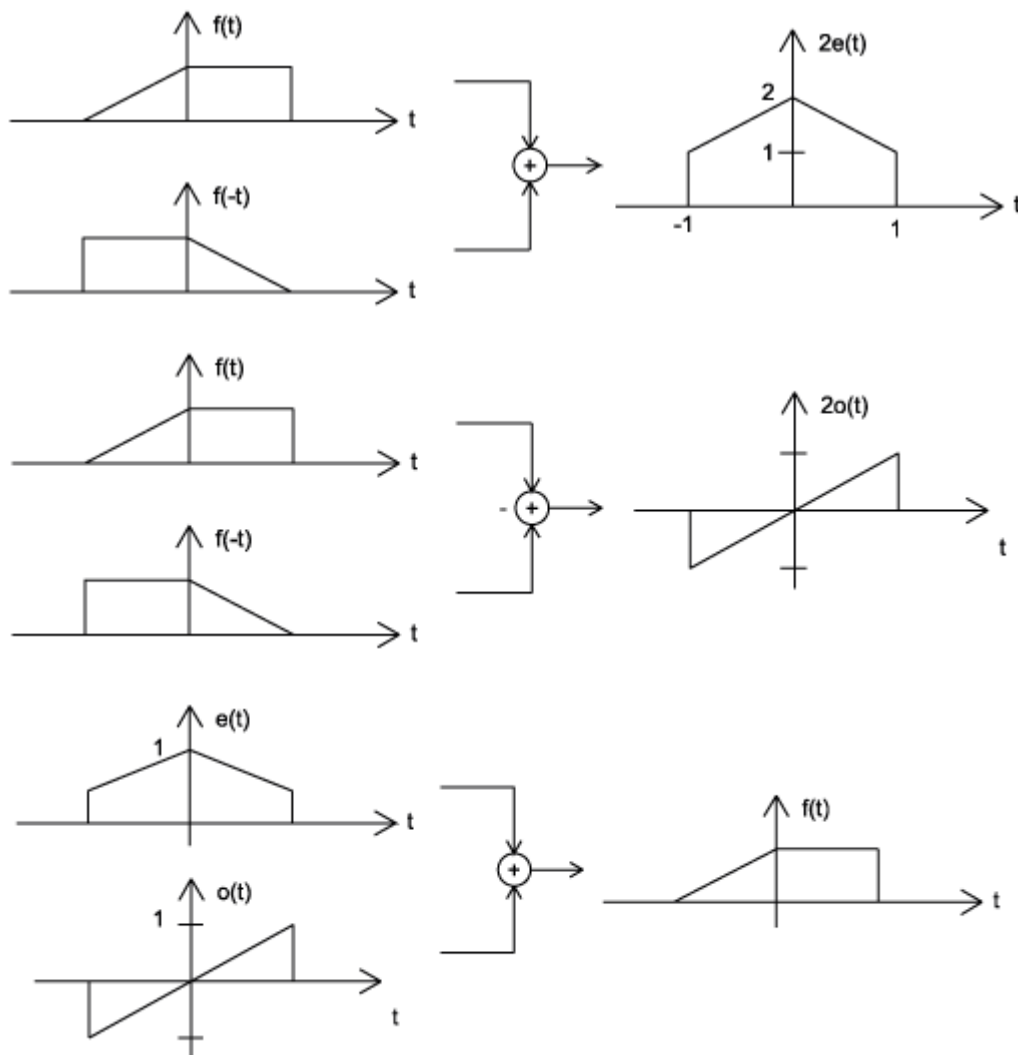
سیگنال زوج



سیگنال فرد

- مثال: سیگنال زیر را به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد نمایش دهید





سیگنال زوج

$$E(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t))$$

سیگنال فرد

$$O(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t))$$

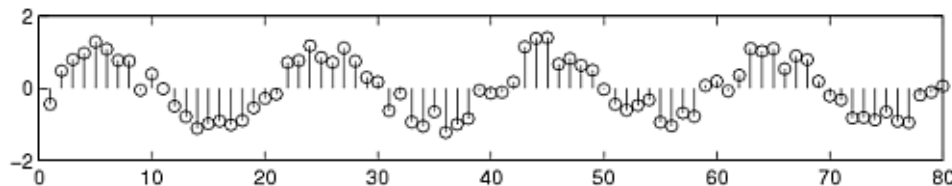
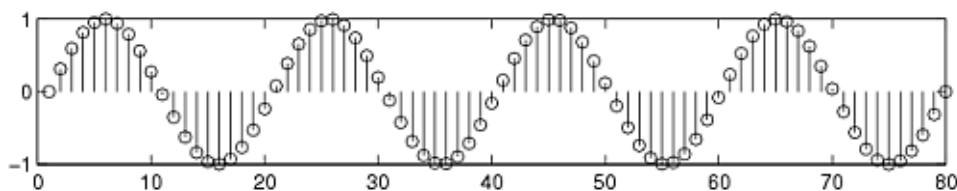
سیگنال اصلی

$$f(t) = E(t) + O(t)$$

• سیگنال قطعی و سیگنال تصادفی

- سیگنال قطعی، سیگنالی است که مقدار آن به ازای هر مقدار متغیر مستقل مشخص بوده و می توان آن را به کمک یک توصیف ریاضی، یک قانون یا جدول تعیین کرد.

$$f(t) = 4\sin(2t)$$
- سیگنال تصادفی، در مقابل سیگنال قطعی، سیگنالی است که در رفتار آن عدم قطعیت وجود داشته و مقدار تابع را به ازای مقادیر مختلف متغیر مستقل نمی توان به طور دقیق تعیین کرد.



اندازه سیگنال و نرم‌ها

- اندازه یک سیگنال، مفهومی از شدت آن سیگنال را به همراه دارد. جهت کمی کردن این مفهوم می‌توان از مفاهیم ریاضی کمک گرفت. این مفاهیم شامل انواع نرم‌ها می‌باشد.
- با توجه به اینکه می‌توان نرم‌های مختلفی را روی یک سیگنال تعریف کرد، مفاهیم مختلفی هم می‌توان در مورد اندازه یک سیگنال بیان کرد.
- انرژی سیگنال با دامنه نامحدود

– توصیف متعارف برای انرژی یک سیگنال به شکل نرم-۲ آن سیگنال بوده که به شکل زیر تعریف می‌گردد،

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

- این تعریف را می توان به شکل زیر تعمیم داد، که به آن نرم- p سیگنال گفته می شود،

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty$$

- با توجه به رفتار توصیفی بیان شده برای زمانی که p به سمت بینهایت میل می کند، نرم سیگنال را می توان به شکل زیر تعریف کرد،

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$$

- اصطلاحاً گفته می شود سیگنال f به فضای برداری $L_p(\mathbb{R})$ تعلق دارد، هرگاه داشته باشیم

$$\|f\|_p < \infty$$

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t}, & 1 \leq t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \infty$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} \right)^2 dt \right)^{1/2} = 1$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| = \sup_{t \in [1, \infty)} \frac{1}{t} = 1$$

• انرژی سیگنال با دامنه محدود

– سیگنال $f(t)$ را در نظر بگیرید که در محدوده $[a, b]$ تعریف شده است. انرژی این سیگنال به شکل نرم-۲ به صورت زیر تعریف می گردد،

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

– برای نرم های p و ∞ خواهیم داشت،

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a, b]} |f(t)|$$

• مثال:

$$f(t) = \begin{cases} t, & -5 < t < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\|f\|_1 = \int_{-5}^{+3} |f(t)| dt = \int_{-5}^3 |t| dt = 17$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{-5}^{+3} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left(\int_{-5}^3 t^2 dt \right)^{1/2} \approx 7.12$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [-5, 3]} |f(t)| = \sup_{t \in [-5, 3]} |t| = 5$$

- برای محاسبه انرژی سیگنال‌های گسسته نامحدود خواهیم داشت:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f[n]|^p \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]|$$

- برای محاسبه انرژی سیگنال‌های گسسته محدود $[a, b]$ خواهیم داشت:

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=a}^b |f[n]|^2 \right)^{1/2}$$

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=a}^b |f[n]|^p \right)^{1/p}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \in [a, b]} |f[n]|$$

$$f[n] = \begin{cases} \frac{1}{n}, & 1 \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

$$\|f\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f[n]| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |f[n]|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |f[n]| = \sup_{n \in [1, +\infty)} \left| \frac{1}{n} \right| = 1$$

$$f[n] = \begin{cases} n, & -5 < n < 3 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

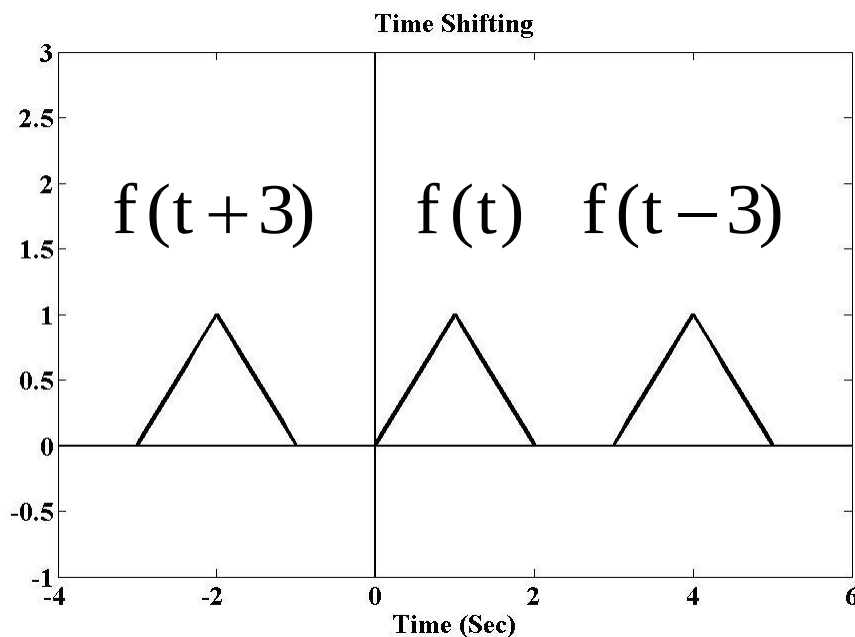
$$\|f\|_1 = ?$$

$$\|f\|_2 = ?$$

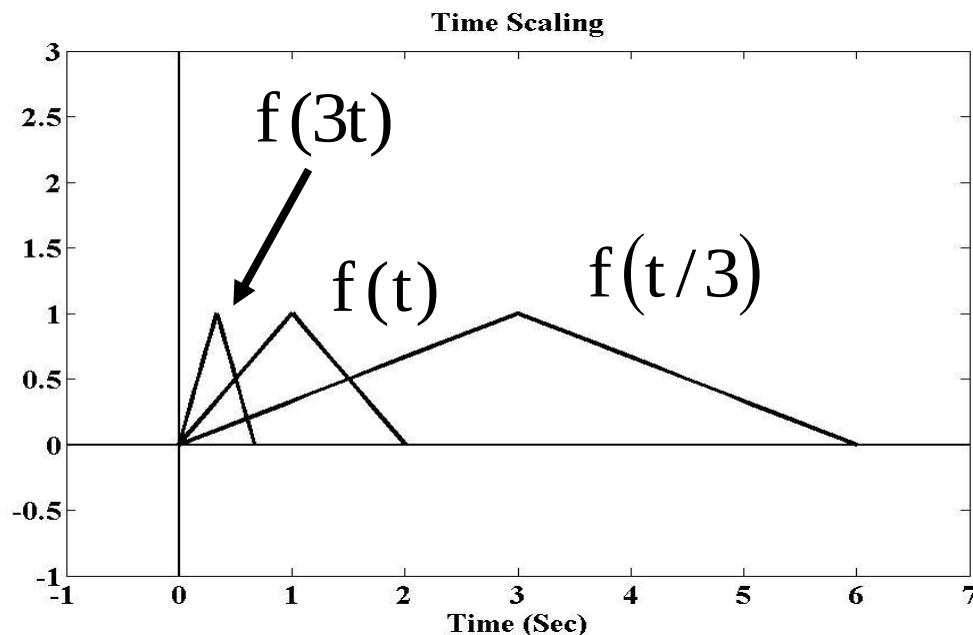
$$\|f\|_\infty = ?$$

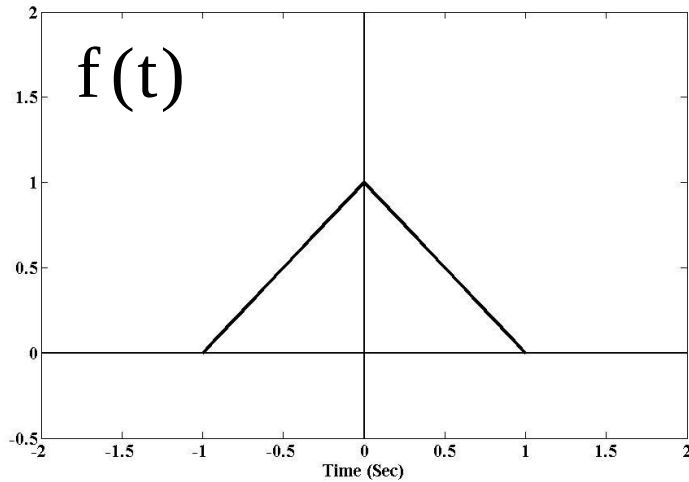
عملیات سیگنالی

- انتقال در حوزه زمان: برای انتقال یک سیگنال در حوزه زمان، کافی است متغیر مستقل که یک متغیر زمانی می باشد را با یک مقدار مثبت (تقدم)، یا یک مقدار منفی (تاخیر) جمع کنیم.

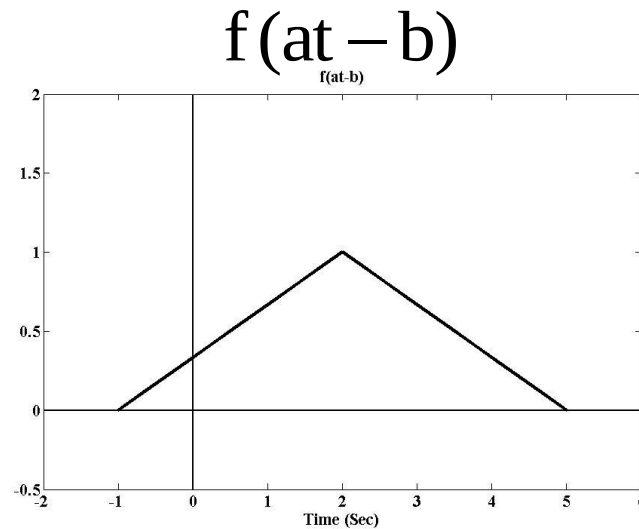
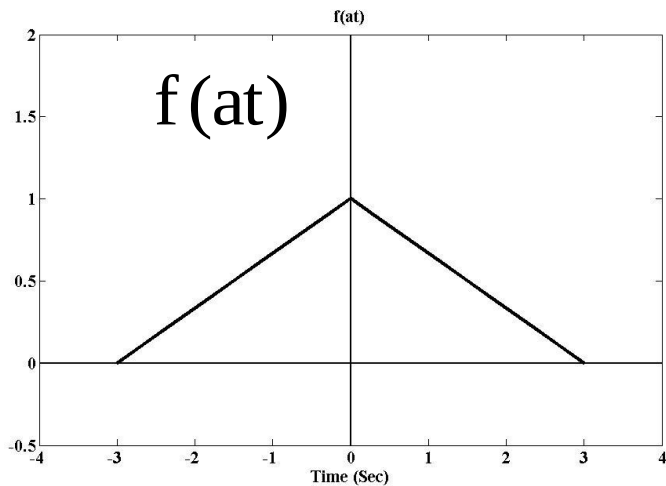


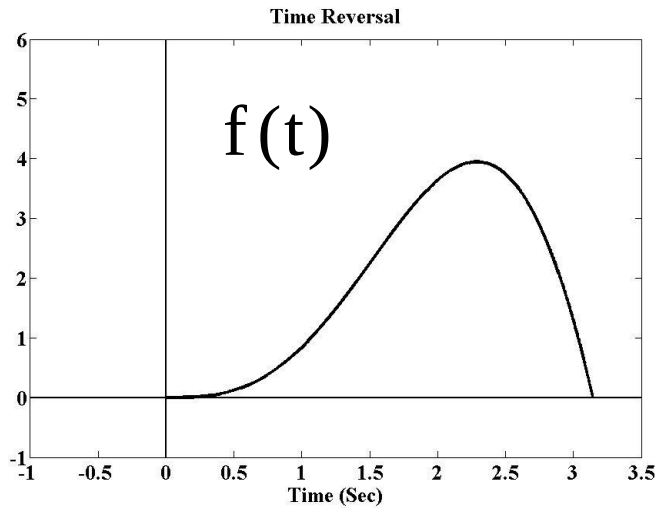
- **مقیاس بندی زمانی:** برای تغییر مقیاس زمانی، کافی است متغیر مستقل را در یک عدد مثبت ضرب کنیم، اگر عدد بزرگتر از یک باشد، عمل فشرده سازی سیگنال و اگر عدد کوچکتر از یک باشد، عمل انبساط سیگنال رخ داده است.



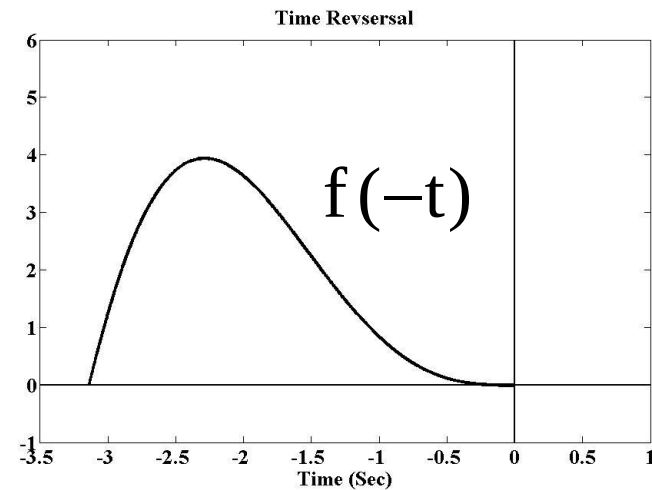


- مثال: اگر تابع $f(t)$ به صورت زیر باشد،
تابع $f(at-b)$ چه شکلی خواهد داشت؟





- معکوس سازی زمانی، نتیجه ضرب شدن متغیر زمانی در -1 می باشد.



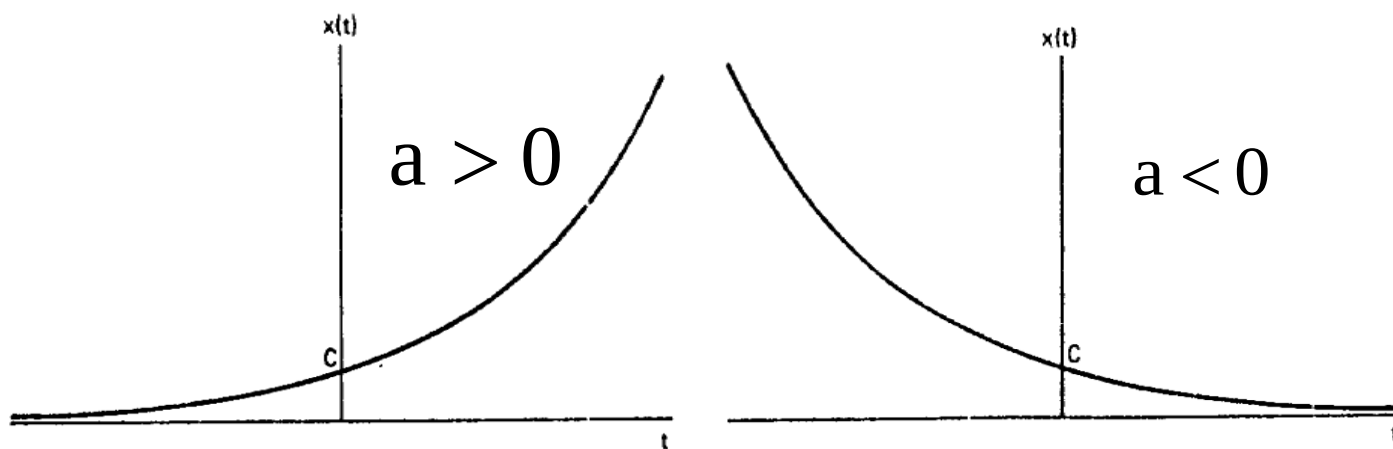
- این معکوس سازی برای سیگنال های گسسته نیز به همین شکل است.

سیگنال‌های زمانی پیوسته پایه

- در این مبحث به معرفی چند سیگنال پایه خواهیم پرداخت. این سیگنال‌ها نه تنها در طبیعت به مراتب یافت می‌شوند بلکه برای ساخت سایر سیگنال‌های دیگر نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.
- سیگنال‌های نمایی و سینوسی

– سیگنال نمایی به شکل زیر خواهد بود.

$$x(t) = Ce^{at}$$



- دومین سیگنال نمایی مهم به شکل زیر می باشد،

$$x(t) = Ce^{j\omega_0 t}$$

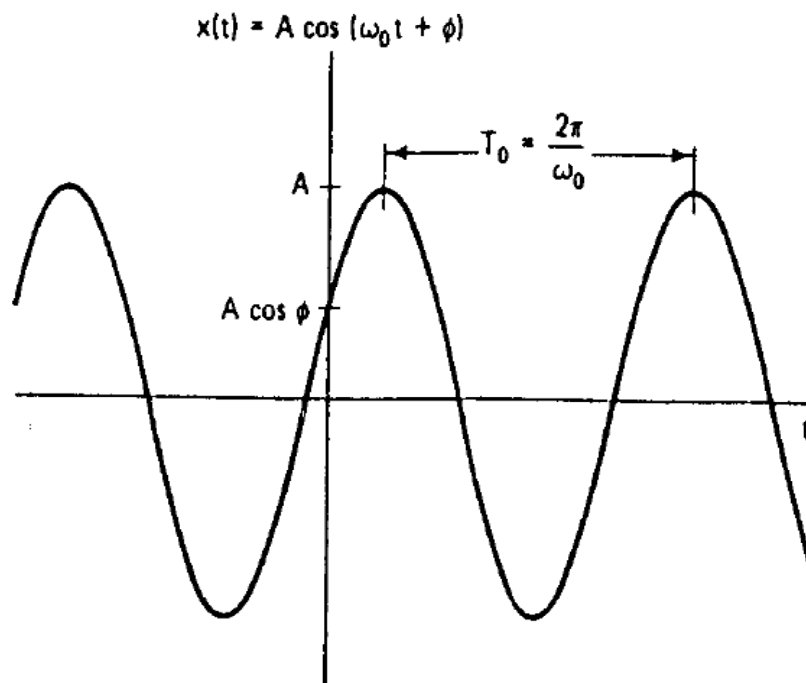
- مهمترین خاصیت این سیگنال، تناوبی بودن آن می باشد. به منظور بررسی این موضوع، فرض می کنیم دوره تناوب این سیگنال برابر مقدار T باشد، بنابراین باید داشته باشیم،

$$x(t) = x(t + T) \Rightarrow Ce^{j\omega_0 t} = Ce^{j\omega_0 (t+T)} \Rightarrow e^{j\omega_0 T} = 1$$

$$T = \frac{2\pi}{|\omega_0|}, \quad \omega_0 \neq 0$$

- سیگنالی که نزدیکی زیادی به سیگنال نمایی مختلط دارد، سیگنال سینوسی می باشد که به شکل زیر قابل نمایش است،

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$



- سیگنال‌های سینوسی و نمایی مختلط کمک زیادی در توصیف پدیده‌هایی از قبیل رفتار یک مدار LC یا یک سیگنال موزیکال می‌کنند.

- به کمک رابطه اوایلر، سیگنال نمایی مختلط را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سیگنال‌هایی سینوسی با دوره تناوب اصلی یکسان نوشت:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j\sin(\omega_0 t)$$

- به‌طور مشابه، یک سیگنال سینوسی را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال نمایی مختلط بیان کرد:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = A \operatorname{Re}\{e^{j(\omega_0 t + \phi)}\}$$

- سیگنال ثابت دارای دوره تناوب اصلی نمی باشد.
- حالت کلی تر یک سیگنال نمایی مختلط شامل دو بخش می باشد:

– یک نمایی حقیقی

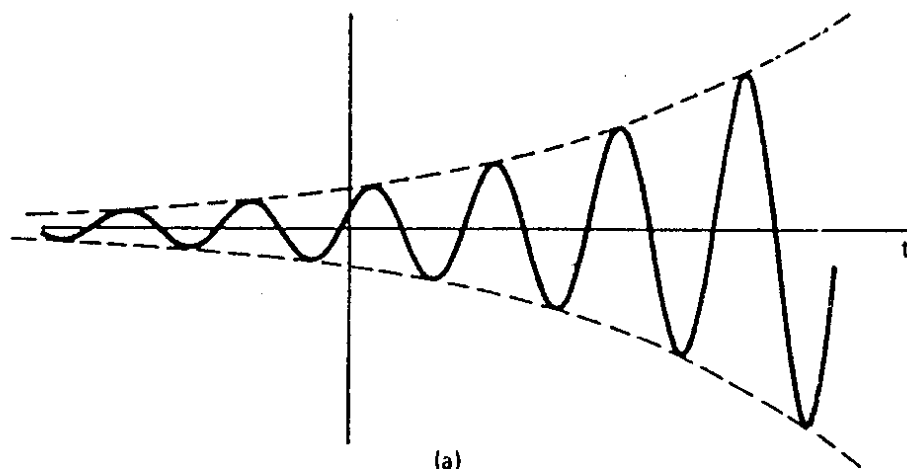
$$x = Ce^{at}, \quad a = r + j\omega_0, \quad C = C_a e^{j\theta}$$

– یک نمایی مختلط متناوب

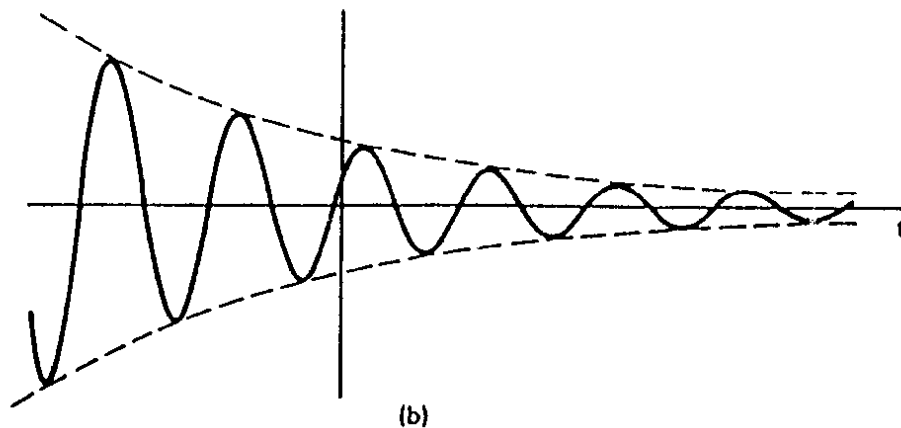
$$x = Ce^{at} = C_a e^{j\theta} e^{(r+j\omega_0)t} = C_a e^{rt} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

$$x = C_a e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j C_a e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

$$= C_a e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j C_a e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta - \frac{\pi}{2})$$



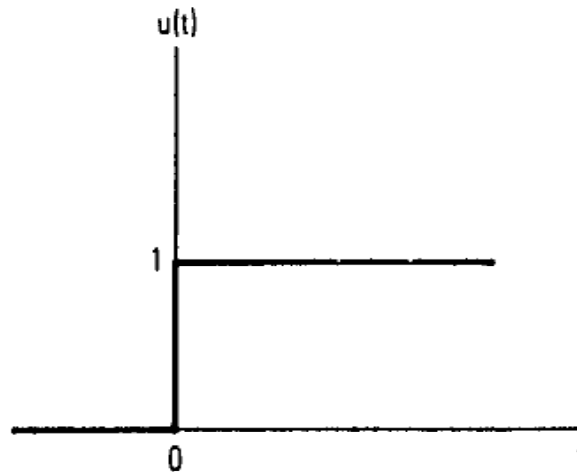
$$r > 0$$



$$r < 0$$

• سیگنال پله واحد

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

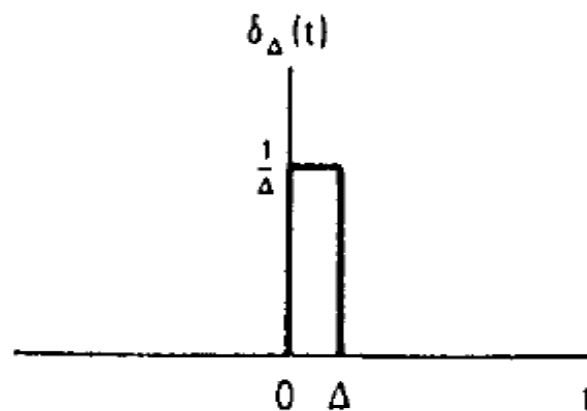
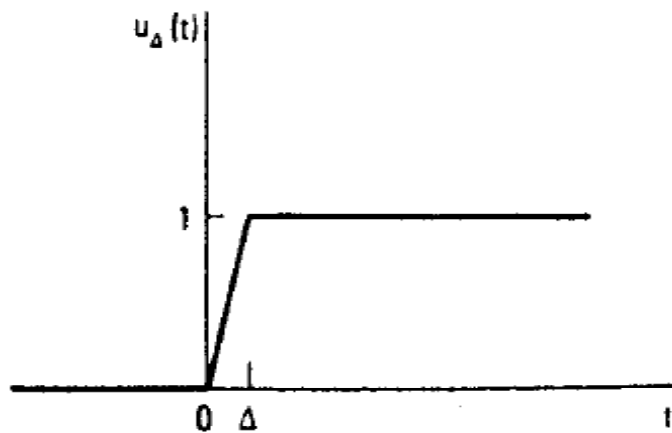


• سیگنال ضربه واحد، رابطه این سیگنال با سیگنال پله واحد به شکل زیر می باشد،

$$u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

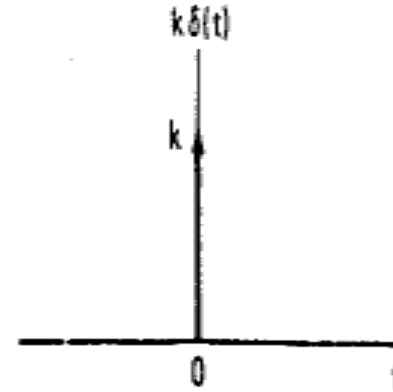
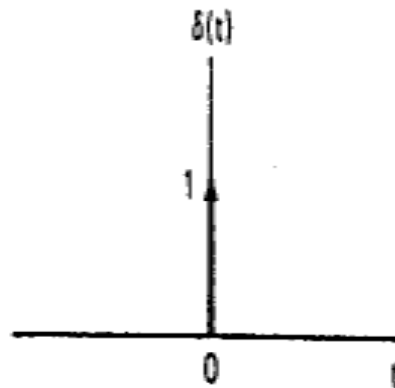
- به منظور اینکه دید صحیحی از سیگنال ضربه واحد به شکل مشتقی از سیگنال پله واحد داشته باشیم، می توان سیگنال ضربه را به شکل زیر بیان کرد،

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt} \quad \Delta \rightarrow 0 \quad \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



- در حالت کلی می توان برای تابع ضربه یک مقیاس در نظر گرفت به این ترتیب که تابع ضربه $k\delta(t)$ ، تابعی با سطح زیر نمودار k خواهد بود. می توان نوشت:

$$\int_{-\infty}^t k\delta(\tau)d\tau = ku(t)$$



- بررسی حاصلضرب یک تابع ضربه در یک سیگنال پیوسته

$$x_1(t) = x(t)\delta_{\Delta}(t)$$

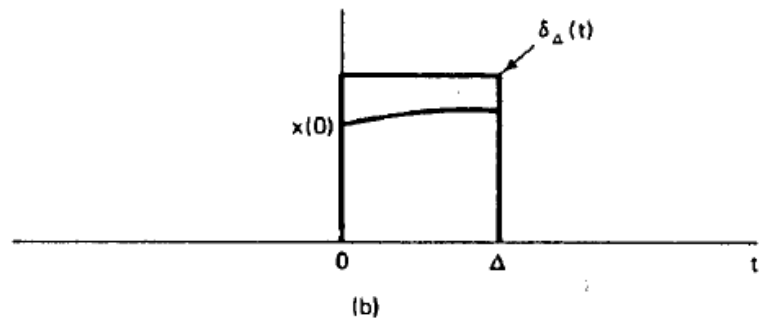
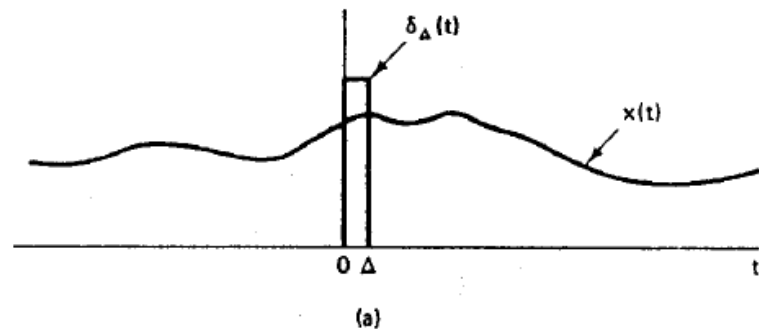
$$x(t)\delta_{\Delta}(t) \approx x(0)\delta_{\Delta}(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t) \quad \text{می دانیم}$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \quad \text{بنابراین:}$$

همچنین:

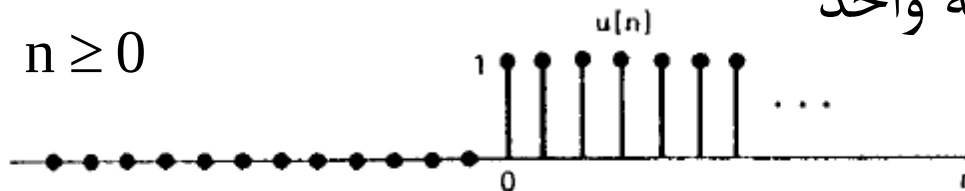
$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$



سیگنال‌های زمانی گسسته پایه

- در حالت زمان گسسته نیز تعدادی سیگنال پایه وجود دارد که در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها نقش مهمی دارند.
- این سیگنال‌ها، همانند سیگنال‌های زمان پیوسته و بسیاری از خواص آنها مشابه خواص سیگنال‌های زمان پیوسته است. با این وجود چندین اختلاف مهم بین این سیگنال‌ها و سیگنال‌های زمان پیوسته وجود دارد که در حین بیان ویژگی‌های این سیگنال‌ها به بیان آنها خواهیم پرداخت.

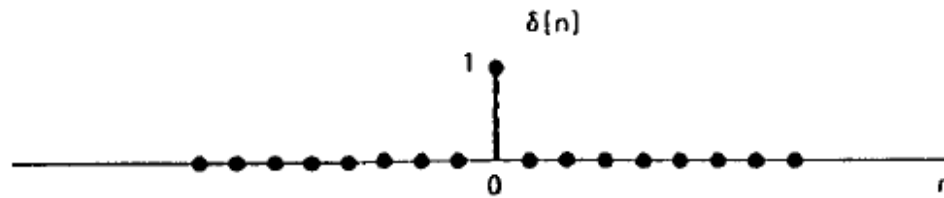
$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$



- سیگنال گسسته پله واحد

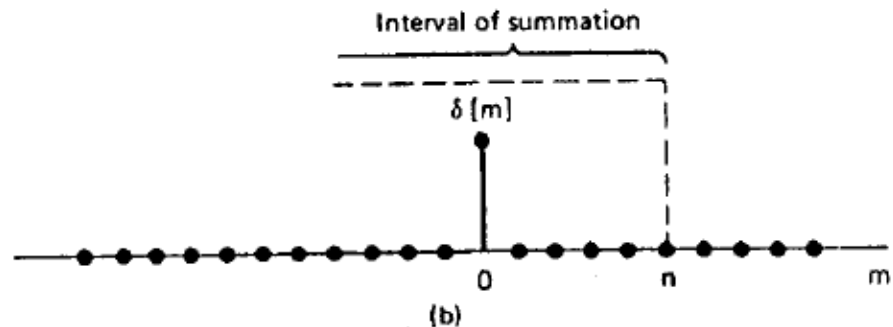
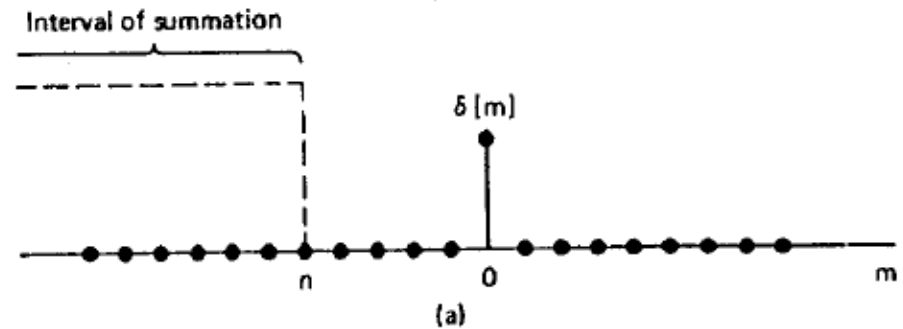
• سیگنال ضربه واحد گسسته

$$\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$$



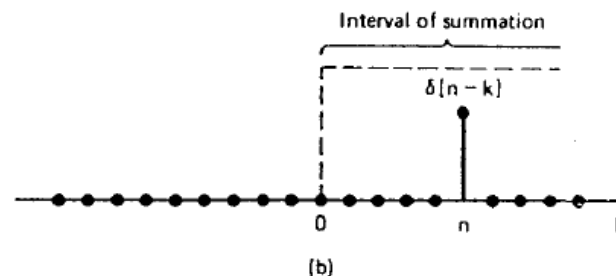
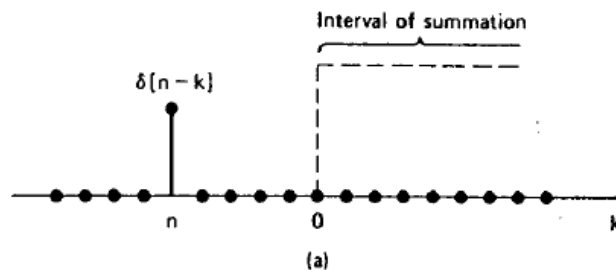
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$



$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$

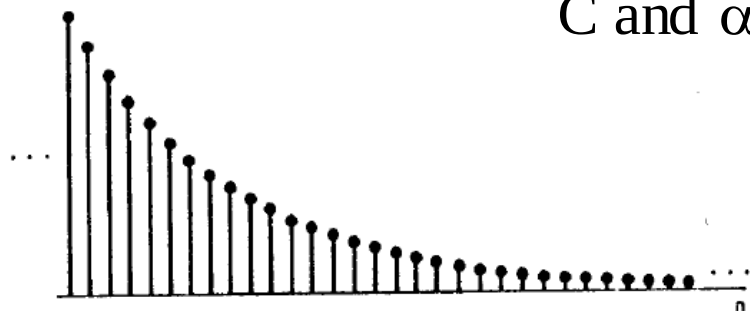
$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$



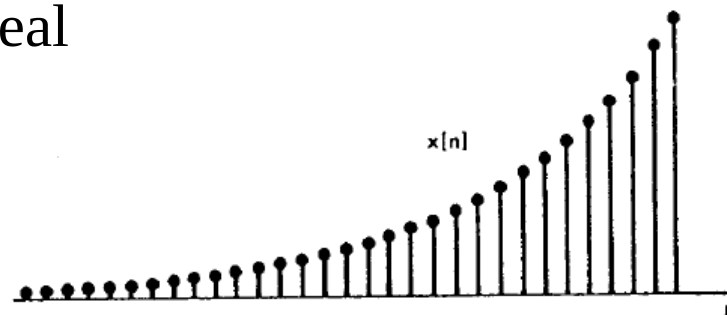
- سیگنال‌های نمایی مختلط و سینوسی زمان گسسته
– در حالت کلی C و α مختلط هستند.

$$x[n] = C\alpha^n$$

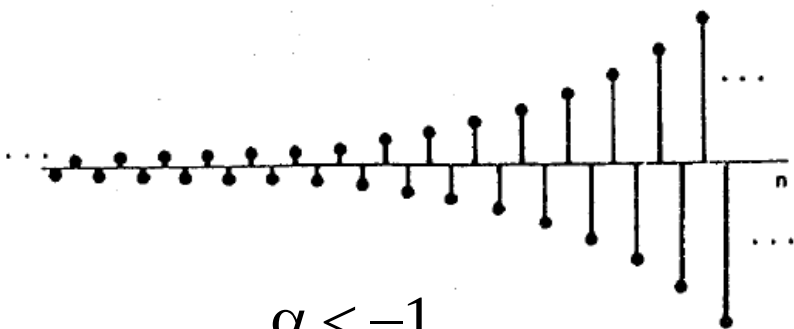
C and α are real



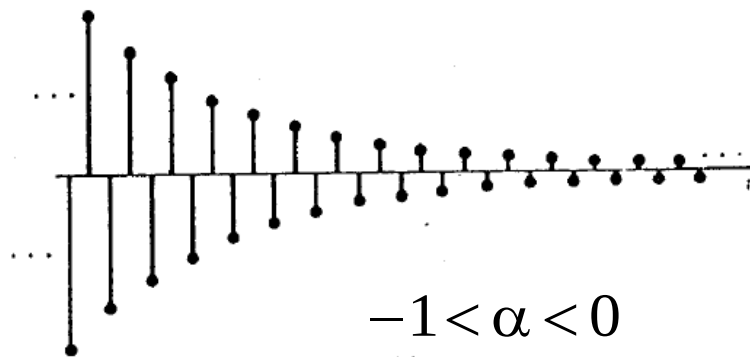
$$0 < \alpha < 1$$



$$\alpha > 1$$



$$\alpha < -1$$



$$-1 < \alpha < 0$$

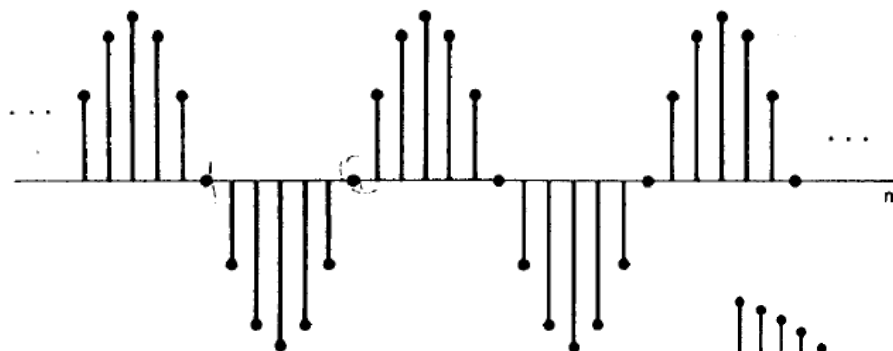
- فرض کنید: $\alpha = e^{\beta}$ و β یک عدد مختلط باشد. به عنوان مثال:

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

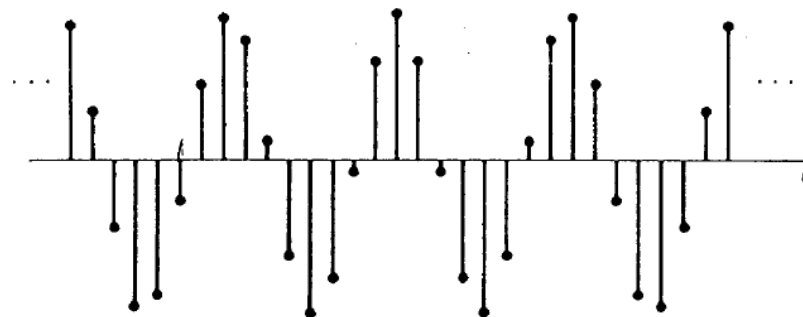
این تابع نزدیکی زیادی به تابع زیر دارد،

$$x_1[n] = A \cos(\Omega_0 n + \phi)$$

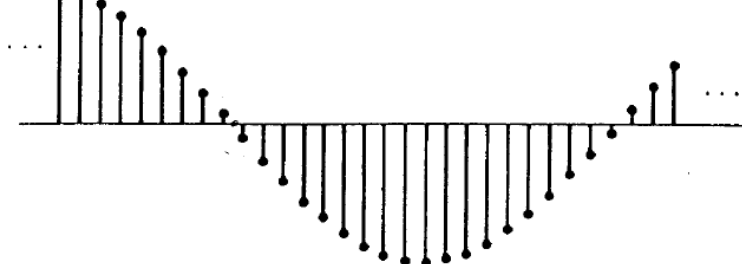
$$x[n] = \cos(2\pi n/12)$$



$$x[n] = \cos(8\pi n/31)$$



$$x[n] = \cos(n/6)$$



- با توجه به رابطه اوایلر می توان نوشت:

$$e^{j\Omega_0 n} = \cos \Omega_0 n + j \sin \Omega_0 n$$

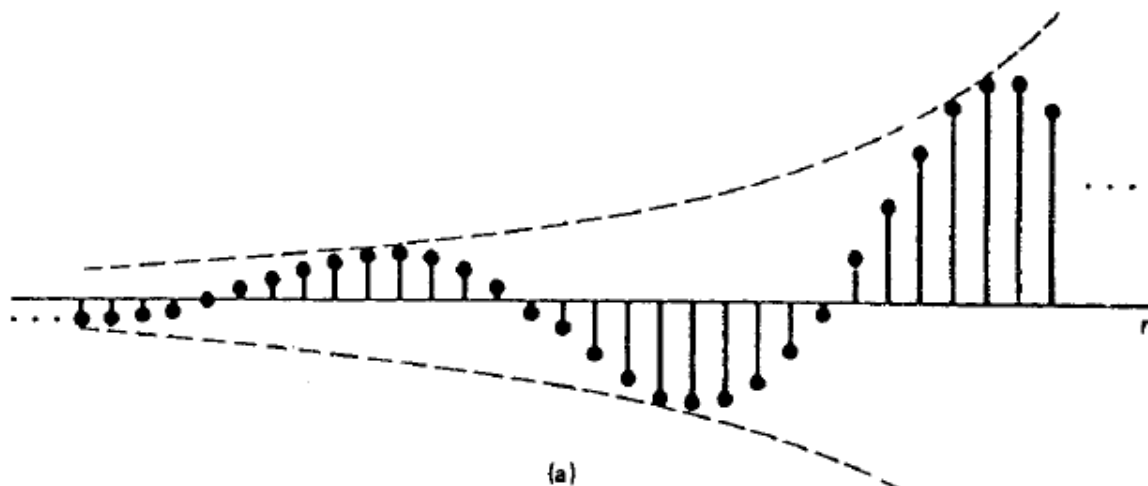
$$A \cos(\Omega_0 n + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\Omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\Omega_0 n}$$

- شکل کلی یک تابع نمایی را می توان به صورت زیر در نظر گرفت:

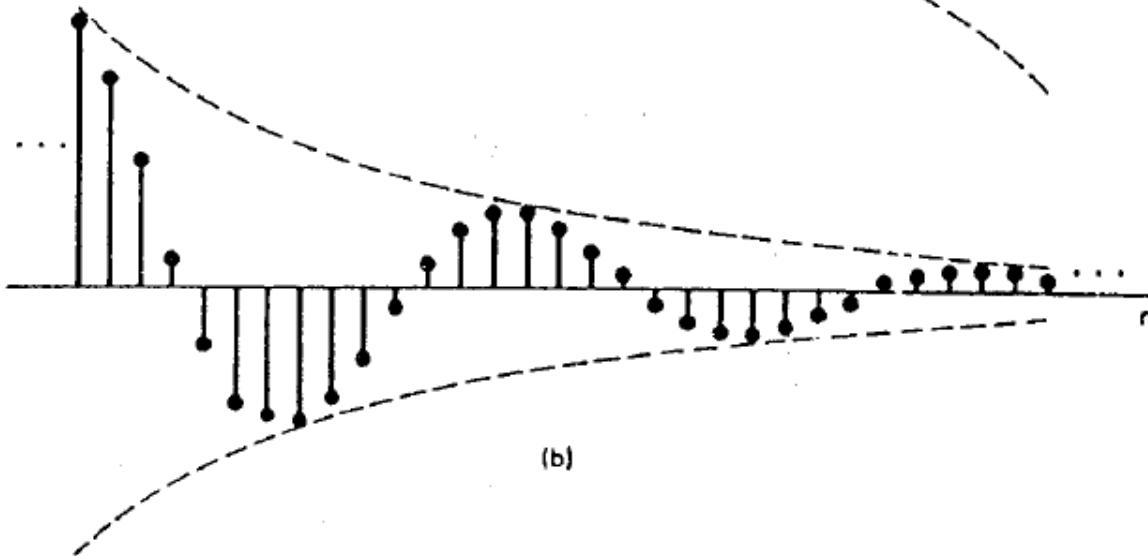
$$x[n] = C \alpha^n, \quad C = |C| e^{j\theta}, \quad \alpha = |\alpha| e^{j\Omega_0}$$

$$x[n] = |C| |\alpha|^n \cos(\Omega_0 n + \theta) + j |C| |\alpha|^n \sin(\Omega_0 n + \theta)$$

$$|\alpha| > 1$$



$$|\alpha| < 1$$



- خواص تناوبی سیگنال نمایی مختلط زمان گسسته

– ابتدا در مورد ۲ خاصیت مهم که قبلاً برای سیگنال‌های نمایی مختلط پیوسته ($e^{j\omega_0 t}$) بیان کردیم صحبت می‌کنیم: ۱- هرچه دامنه ω_0 افزایش یابد، نرخ نوسانات سیگنال افزایش خواهد یافت. ۲- به ازای هر مقدار ω_0 سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ نوسانی خواهد بود.

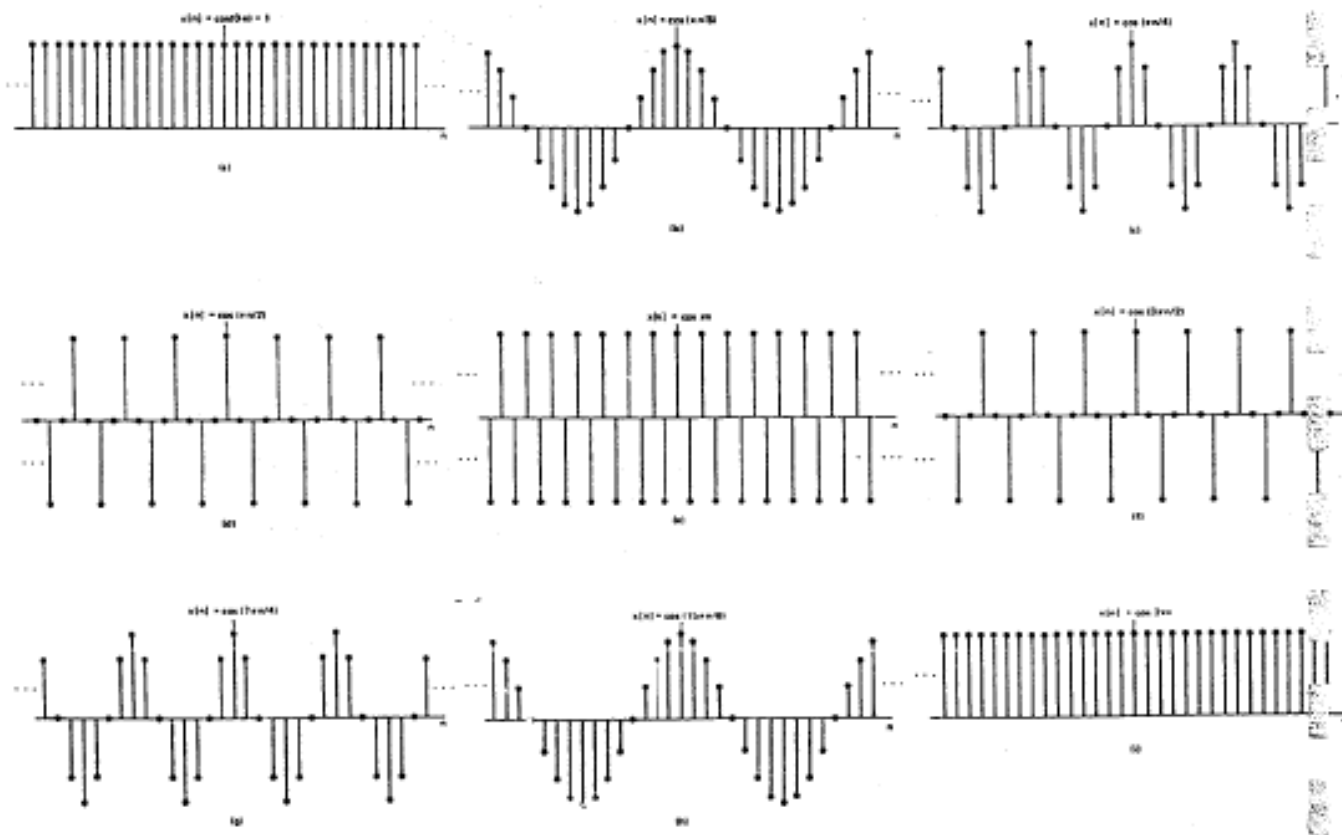
- اولین خاصیت بیان شده در مورد حالت گسسته با این خاصیت در مورد حالت پیوسته متفاوت است. علت این تفاوت بر پایه رابطه زیر است:

$$e^{j(\Omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\Omega_0 n} = e^{j\Omega_0 n}$$

- این رابطه نشان می‌دهد که مقدار تابع در فرکانس $\Omega_0 + 2\pi$ همان مقدار تابع در فرکانس Ω_0 می‌باشد.

- در حالت زمان پیوسته، برای مقادیر متفاوت ω_0 ، سیگنال‌های متفاوتی حاصل خواهد شد. در حالیکه در حالت زمان گسسته سیگنال‌های حاصل شده برای مقادیر متفاوت Ω_0 ، $\Omega_0 \pm 2\pi$ ، $\Omega_0 \pm 4\pi$ و ... یکسان خواهد بود.
- بنابراین در مورد سیگنال‌های گسسته، کافی است یک بازه با طول 2π را در نظر بگیریم.
- بنا به آنچه گفته شد، در مورد سیگنال $e^{j\Omega_0 n}$ با افزایش Ω_0 ، نرخ نوسانات سیگنال پیوسته افزایش نخواهد یافت.
- می‌توان گفت با افزایش Ω_0 از صفر تا π نرخ نوسانات افزایش یافته و با افزایش Ω_0 تا 2π نرخ نوسانات کاهش می‌یابد.

- همچنین می توان گفت نرخ نوسانات به ازای مقادیری از Ω_0 در نزدیکی صفر و ضرایب زوج π کمترین مقدار و در نزدیکی ضرایب فرد π بیشترین مقدار را دارد.



- **بررسی خاصیت دوم:** به منظور اینکه سیگنال $e^{j\Omega_0 n}$ یک سیگنال متناوب با دوره تناوب N باشد، باید داشته باشیم،

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n} \quad e^{j\Omega_0 N} = 1 \quad \Omega_0 N = 2\pi m \quad \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

- این رابطه نشان می‌دهد که سیگنال $e^{j\Omega_0 n}$ برای مقادیر دلخواه Ω_0 متناوب نمی‌باشد و تنها برای مقادیری از Ω_0 متناوب خواهد بود که نسبت $\frac{\Omega_0}{2\pi}$ یک عدد گویا باشد.
- شرط دوم بیان شده در مورد سیگنال‌های سینوسی گسسته نیز صادق است.

TABLE 2.1 DIFFERENCES BETWEEN THE SIGNALS $e^{j\omega_0 t}$ AND $e^{j\Omega_0 n}$.

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\Omega_0 n}$
Distinct signals for distinct values of ω_0	Identical signals for exponentials at frequencies separated by 2π
Periodic for any choice of ω_0	Periodic only if $\Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ for some integers $N > 0$ and m .
Fundamental frequency ω_0	Fundamental frequency† $\frac{\Omega_0}{m}$
Fundamental period $\omega_0 = 0$: undefined $\omega_0 \neq 0$: $\frac{2\pi}{\omega_0}$	Fundamental period† $\Omega_0 = 0$: undefined $\Omega_0 \neq 0$: $m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right)$

†These statements assume that m and N do not have any factors in common.

• برای یک سیگنال گسسته با دوره تناوب اصلی N ، دوره تناوب اصلی به شکل زیر خواهد بود:

$$\frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{m}$$

$$N = m \left(\frac{2\pi}{\Omega_0} \right)$$

- هم در مورد سیگنال‌های نمایی مختلط پیوسته و هم در مورد سیگنال‌های نمایی مختلط گسسته می‌توان هارمونیک‌هایی با دوره تناوب یکسان پیدا کرد با تفاوت که در حالت پیوسته این سیگنال‌ها کاملاً متمایز ولی در حالت گسسته چنین نمی‌باشد.

$$\phi_k(t) = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\phi_{k+N}[n] = e^{j(k+N)(2\pi/N)n} = e^{j2\pi n} e^{jk(2\pi/N)n} = \phi_k[n]$$

- این نشان می‌دهد که در یک مجموعه تنها N هارمونیک متمایز وجود دارد.
- در نهایت سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ را در نظر بگیرید. با نمونه‌برداری از این سیگنال یک سیگنال گسسته به شکل زیر ساخته‌ایم.

$$x[n] = e^{j\omega_0 nT} = e^{j(\omega_0 T)n}$$

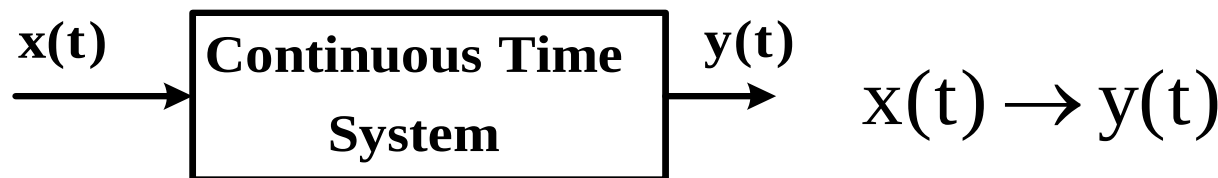
- هرچند سیگنال $e^{j\omega_0 t}$ متناوب می‌باشد ولی سیگنال گسسته حاصل شده تنها در صورتی متناوب خواهد بود که $\frac{\omega_0 T}{2\pi}$ یک عدد گویا باشد.

سیستم‌ها

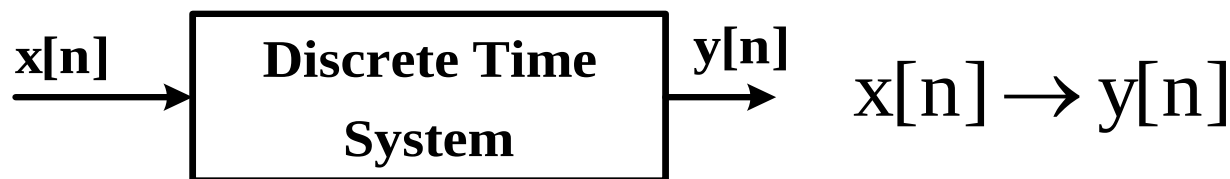
- سیستم: ترکیبی از اجزاست که با هم و برای انجام عملی مشخص کار می‌کنند. هر سیستم دارای تعدادی ورودی و تعدادی خروجی می‌باشد.



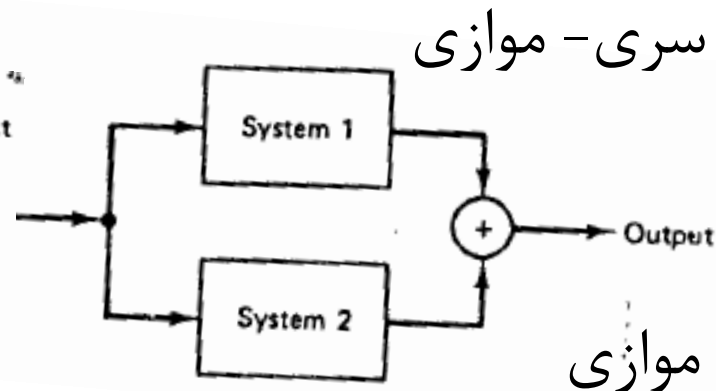
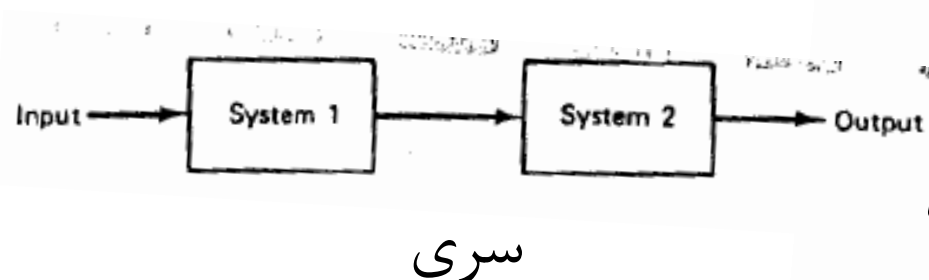
- سیستم‌ها نیز بر دو نوع پیوسته و گسسته هستند.
- سیستم پیوسته، سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی زمان پیوسته به سیگنال‌های خروجی زمان پیوسته انتقال می‌یابد.

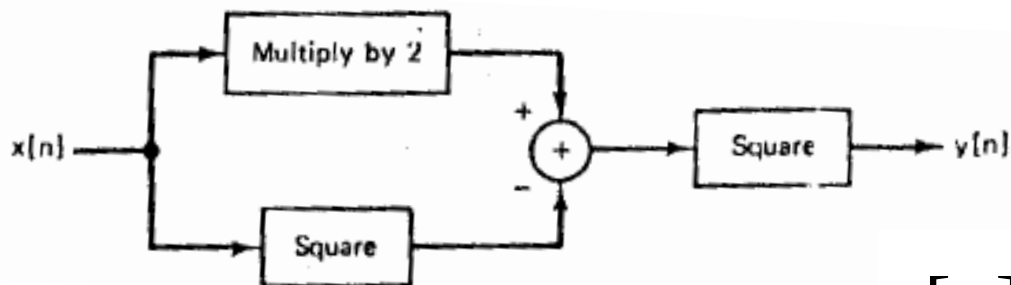
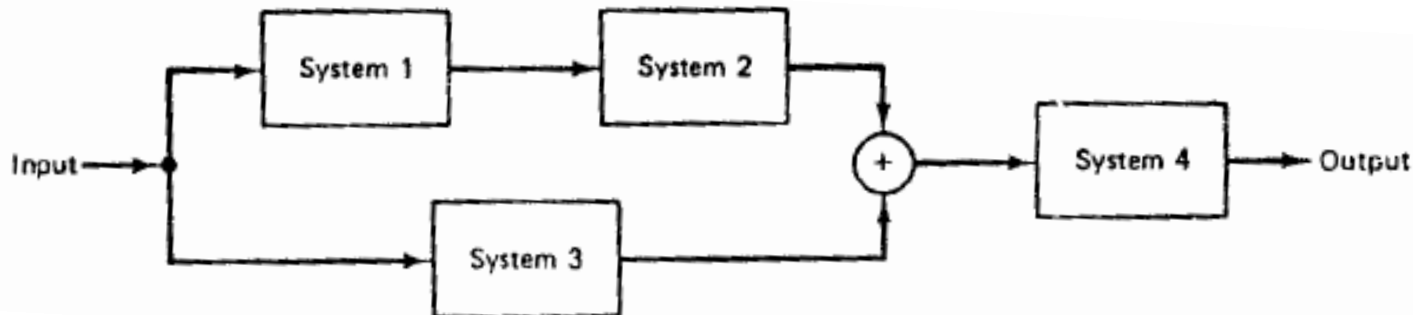


- سیستم گسسته، سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی زمان گسسته به سیگنال‌های خروجی زمان گسسته انتقال می‌یابد.

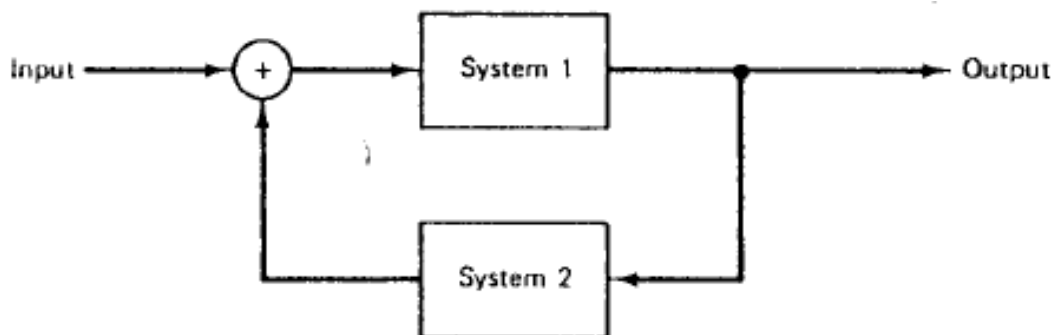


- سیستم‌ها به شکل‌های مختلفی با هم ترکیب می‌شوند: سری، موازی،

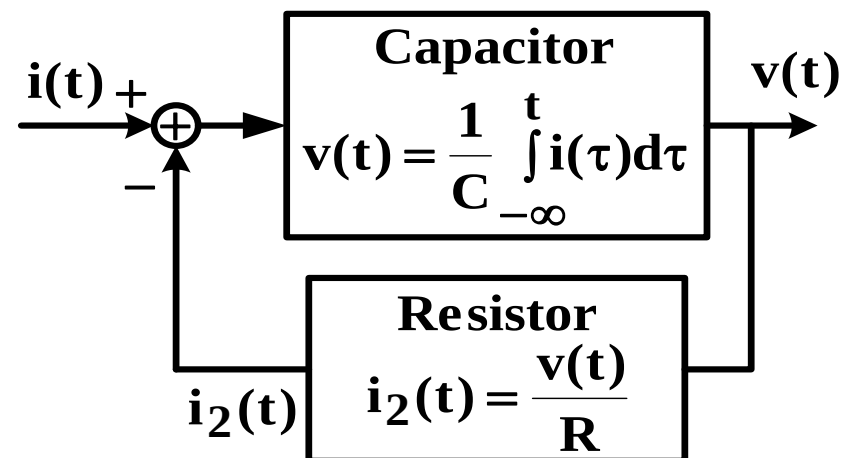
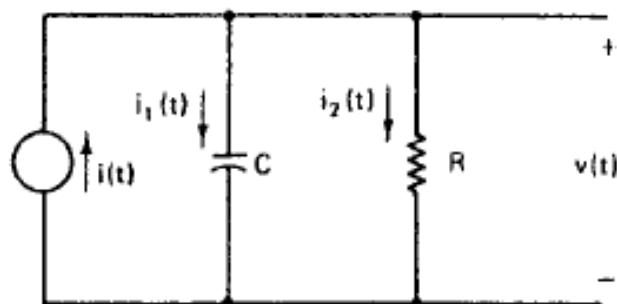




$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$



• اتصال دارای فیدبک



خواص سیستم‌ها

• سیستم‌های دارای حافظه و سیستم‌های بدون حافظه

– سیستمی را بدون حافظه گویند که خروجی سیستم در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه وابسته باشد.

– مقاومت الکتریکی، یک سیستم بدون حافظه است. $y(t) = Rx(t)$

$$y[n] = (2x[n] - x[n]^2)^2$$

– در مقابل، سیستمی دارای حافظه است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در لحظات دیگر نیز وابسته باشد.

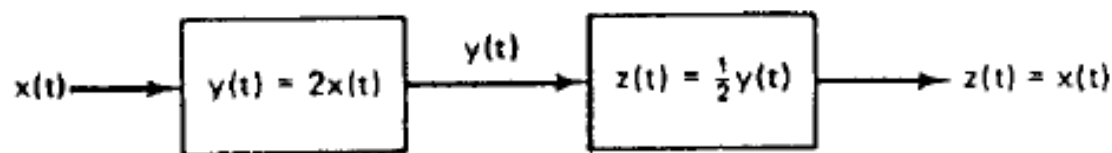
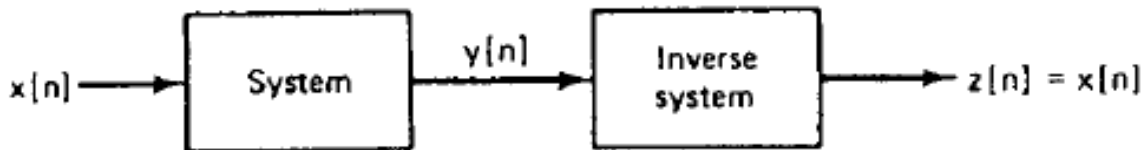
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad y(t) = x(t-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

• معکوس پذیری و سیستم های معکوس

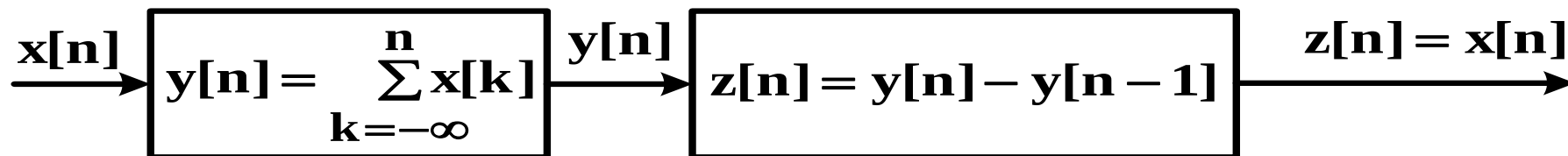
– یک سیستم را معکوس پذیر گویند، اگر ورودی های متفاوت منجر به خروجی های متفاوت گردد به عبارت دیگر، در صورت مشاهده خروجی این سیستم بتوان ورودی آن را تعیین کرد.

– در صورتی برای یک سیستم می توان سیستم معکوس پیدا کرد که اگر به صورت سری با سیستم اصلی قرار بگیرد، خروجی نهایی با ورودی سیستم اول برابر شود.



- توابع زیر معکوس ناپذیر هستند،
 $y[n] = 0, \quad y(t) = x^2(t)$

- مثال:
 $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] \quad z[n] = y[n] - y[n-1]$

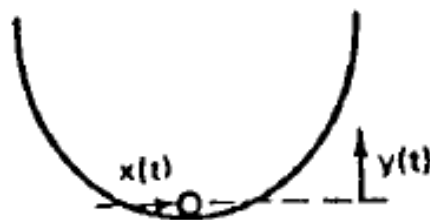
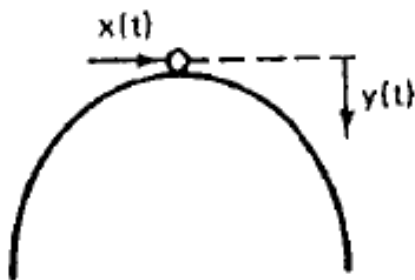


• علی بودن:

- یک سیستم را علی گویند، هرگاه خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و لحظات قبل وابسته باشد.
- تمام سیستم‌های بدون حافظه علی هستند.

• پایداری:

- سیستمی را پایدار گویند که در آن ورودی‌های کوچک، منجر به خروجی‌هایی شود که واگرا نمی‌شوند.



– به عبارت دیگر، سیستمی را پایدار گوئیم که در آن ورودی محدود منجر به خروجی محدود گردد. این نوع پایداری را اصطلاحاً پایداری ورودی محدود-خروجی محدود (BIBO) گویند.

• مثال:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k], \quad \text{Stable}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k], \quad \text{Unstable}$$

$$\text{if } x[n] = u[n] \Rightarrow y[n] = (n+1)u[n]$$

• نامتغیر با زمان:

– یک سیستم را نامتغیر با زمان گویند، هرگاه یک شیفت زمانی در سیگنال ورودی منجر به یک شیفت زمانی در سیگنال خروجی گردد.



$$x(t) \longrightarrow y(t)$$

$$x(t - t_0) \longrightarrow y(t - t_0)$$

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

$$x[n - n_0] \longrightarrow y[n - n_0]$$

• مثال:

$$y(t) = \sin(x(t))$$

$$y_1(t) = \sin(x_1(t))$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \quad y_2(t) = \sin(x_2(t)) = \sin(x_1(t - t_0))$$

$$y_1(t - t_0) = \sin(x_1(t - t_0)) \quad y_2(t) = y_1(t - t_0)$$

• مثال: (متغیر با زمان)

$$y_1[n] = nx_1[n] \quad x_2[n] = x_1[n - n_0]$$

$$y_2[n] = nx_2[n] = nx_1[n - n_0]$$

$$y_1[n - n_0] = (n - n_0)x_1[n - n_0] \neq y_2[n]$$

• مثال‌های دیگر:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$$

$$y(t) = Rx(t)$$

• خطی بودن

– یک سیستم پیوسته یا گسسته با زمان را خطی گویند هرگاه اصل جمع آثار را در خود داشته باشد.

– فرض کنید، $y_1(t)$ خروجی یک سیستم پیوسته برای ورودی $x_1(t)$ ، و $y_2(t)$ خروجی همین سیستم برای ورودی $x_2(t)$ باشد، در این صورت این سیستم را خطی گویند هرگاه ۲ شرط زیر همواره برقرار باشد:

- پاسخ به ورودی $x_1(t) + x_2(t)$ ، برابر $y_1(t) + y_2(t)$ باشد.
- پاسخ به ورودی $ax_1(t)$ ، برابر $ay_1(t)$ باشد.

– خاصیت اول را جمع پذیری و خاصیت دوم را مقیاس پذیری گویند.

- این دو خاصیت بیان شده را می توان به شکل زیر با هم ترکیب کرد:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

- نکته قابل توجه در اینجا این است که یک سیستم می تواند خطی و در عین حال متغیر با زمان باشد. همچنین یک سیستم می تواند نامتغیر با زمان باشد بدون اینکه خطی باشد.

$$y[n] = nx[n] \longrightarrow \text{خطی ولی متغیر با زمان}$$

$$y(t) = x^2(t), \quad y(t) = \sin(x(t)) \quad \text{نامتغیر با زمان ولی غیر خطی}$$

- برای یک سیستم خطی فرض $x_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$ یک مجموعه ورودی برای سیستم گسسته و $y_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$ خروجی‌های متناسب با این ورودی‌ها باشد.

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

- این ویژگی تحت عنوان اصل جمع‌آثار مورد استفاده قرار می‌گیرد.
- سیستم‌های خطی یک خاصیت مهم دیگر نیز دارند به این شکل که ورودی صفر، خروجی صفر را به همراه دارد.

$$0 = 0.x[n] \rightarrow 0.y[n] = 0$$

- سیستم زیر را در نظر بگیرید،

$$y[n] = 2x[n] + 3$$

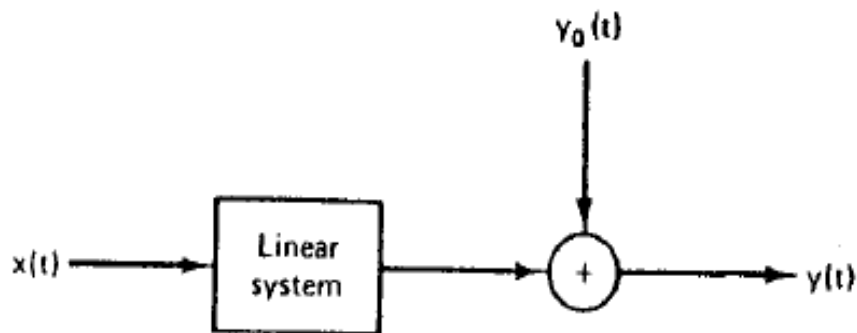
- این سیستم، یک سیستم خطی نیست زیرا خاصیت ورودی صفر-خروجی صفر را برآورده نمی‌سازد. با این وجود معادله توصیف‌کننده این سیستم یک معادله خطی می‌باشد.
- به این نوع سیستم‌ها، سیستم‌های خطی تعمیم‌یافته گفته می‌شود.
- سیستم خطی تعمیم‌یافته، سیستمی است که به تغییرات ورودی به صورت خطی پاسخ می‌دهد. به این معنی که اختلاف در پاسخ به هر دو ورودی دلخواه، یک تابع خطی از اختلاف بین دو ورودی است.

$$x_1[n] \rightarrow y_1[n]$$

$$x_2[n] \rightarrow y_2[n]$$

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - \{2x_2[n] + 3\} = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}$$

- هر سیستم خطی تعمیم یافته را می توان به شکل زیر نمایش داد:



پاسخ هر سیستم خطی تعمیم یافته را می توان به صورت مجموع پاسخ یک سیستم خطی و پاسخ ورودی صفر نمایش داد.

- در تمام این دوره، به بررسی سیستم‌هایی پرداخته خواهد شد که دو خاصیت خطی بودن و نامتغیر با زمان بودن را داشته باشند. به این نوع سیستم‌ها، سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان (LTI) گویند.

LTI : Linear Time Invariant

- این نوع سیستم‌ها، نقش مهمی در تحلیل و طراحی سیستم‌ها بازی می‌کنند. زیرا تعداد زیادی از سیستم‌های موجود در طبیعت را می‌توان به کمک همین سیستم‌های LTI مدلسازی کرد.