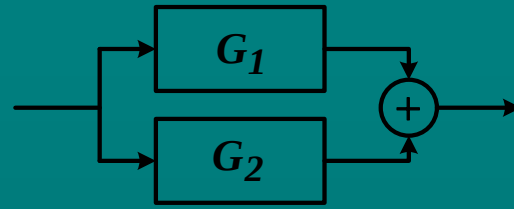


University
of Tehran



Faculty of
Engineering

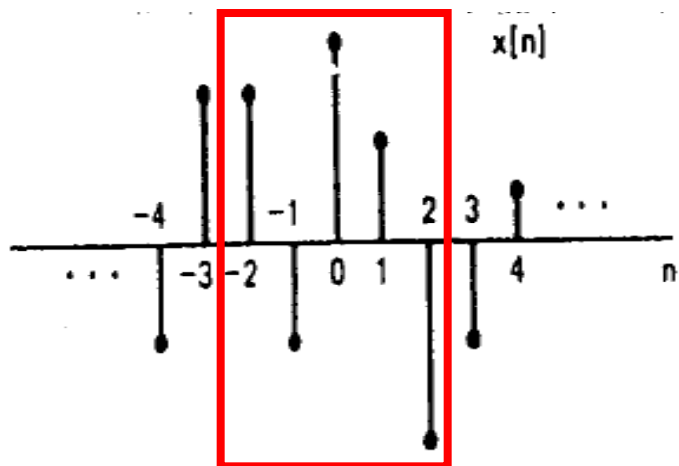
Linear Time Invariant Systems (LTI Systems)

Signals & Systems

Lecture 2

- یکی از ویژگی‌های مهم ضربه واحد این است که می‌توان از آن به عنوان بلوکی برای نمایش هر سیگنال استفاده کرد.
- این ویژگی به همراه اصل جمع آثار و نامتغیر بازمان بودن سیستم، یک خاصیت مهم از هر سیستم LTI را در قالب پاسخ سیستم به ضربه واحد را توسعه می‌دهد.
- چنین توسعه‌ای برای سیستم‌های گسسته، جمع کانولوشن و برای سیستم‌های پیوسته، انتگرال کانولوشن نامیده می‌شود.

• نمایش یک سیگنال بر حسب جملاتی از توابع ضربه



$$x[-2]\delta[n+2] = \begin{cases} x[-2], & n = -2 \\ 0, & n \neq -2 \end{cases}$$

$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$

$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$

$$x[2]\delta[n-2] = \begin{cases} x[2], & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$

$$x[-2]\delta[n+2] + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2]$$

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n]$$

$$+ x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

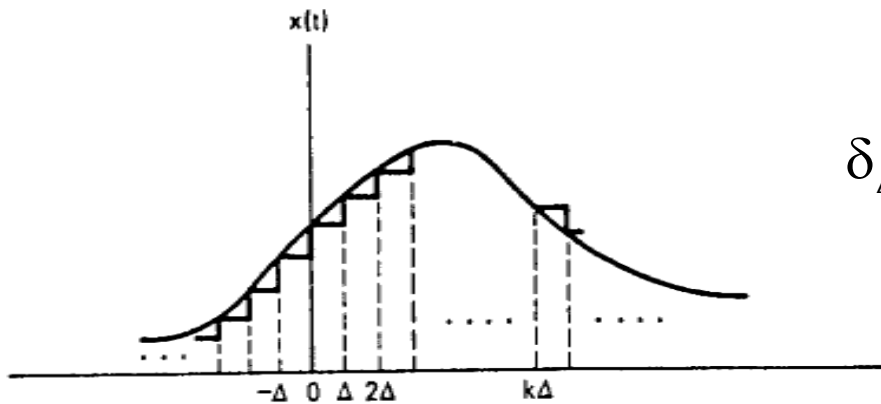
خاصیت انتقالی ضربه واحد

$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

• مثال:

- برای حالت زمان پیوسته، نیز می توان تابع را به شکل جملاتی از ضربه واحد بیان کرد. برای این منظور می توان از تقریب پلکانی تابع استفاده کرد و این تقریب را به صورت مجموعی از توابع پله تأخیر یافته نوشت

Lec. 2



$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \quad x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_0^{+\infty} \delta(t - \tau) d\tau$$

• مثال:

• سیستم‌های LTI زمان گسسته: جمع کانولوشن

– یک سیستم خطی زمان گسسته و یک ورودی دلخواه $x[n]$ را در نظر بگیرید.

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

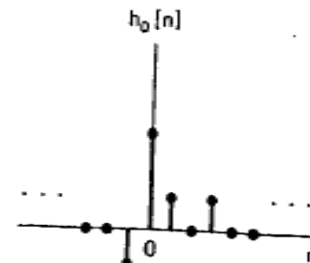
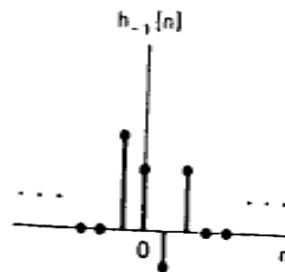
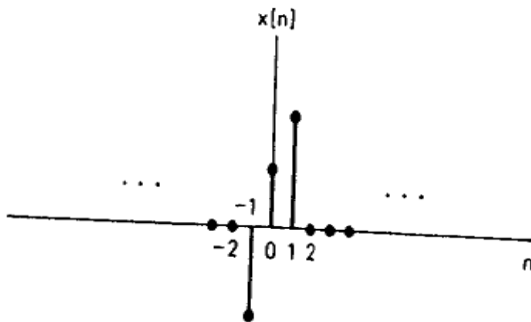
– با توجه به اصل جمع آثار برای سیستم‌های خطی، خروجی سیستم را می‌توان به صورت ترکیب خطی پاسخ‌های سیستم به ضربه‌های واحد شیف‌ت یافته بیان کرد.

– فرض کنید $h_k[n]$ پاسخ یک سیستم خطی به نمونه واحد شیف‌ت یافته $\delta[n-k]$ باشد، در این صورت پاسخ سیستم به ورودی دلخواه را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

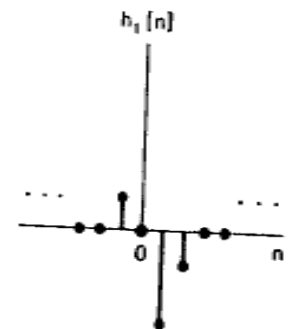
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n]$$

- با توجه به رابطه بیان شده، اگر پاسخ سیستم را به یک مجموعه از توابع ضربه شیفته یافته بدانیم، می توان پاسخ سیستم را به هر ورودی دلخواه محاسبه کرد.

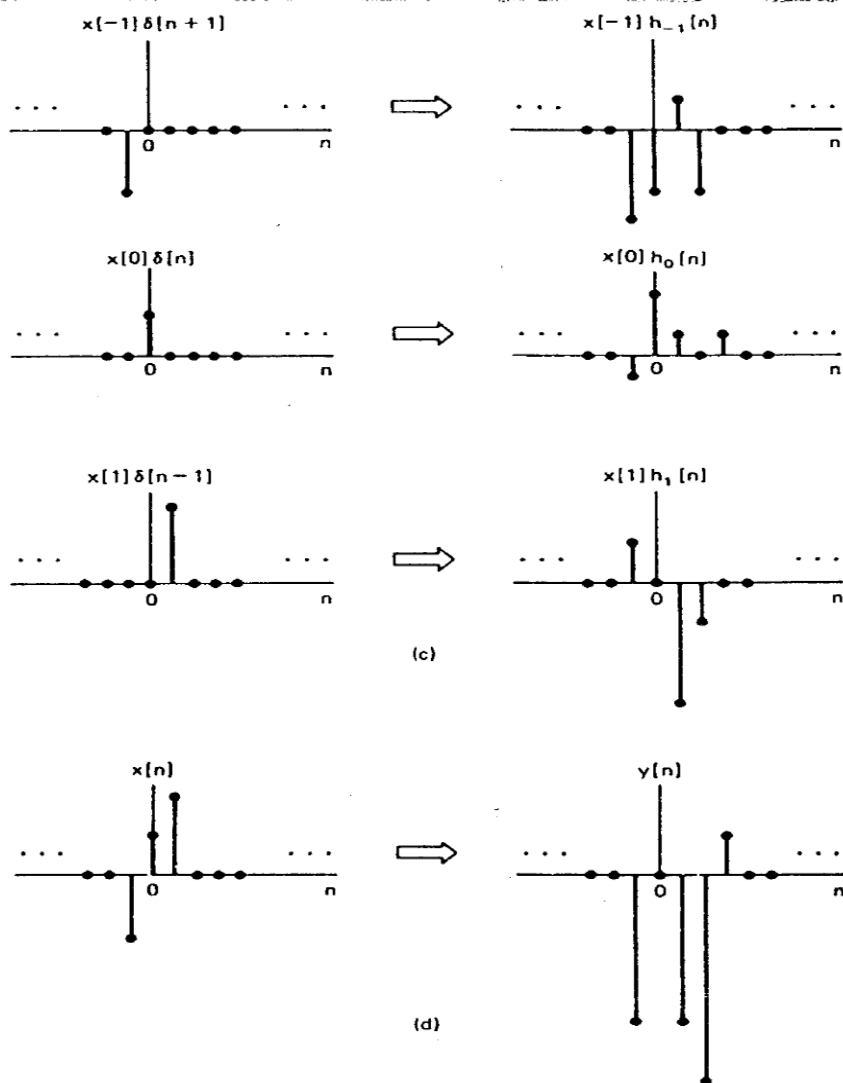
• مثال:



(b)



Lec. 2



• در حالت کلی، لزومی ندارد که $h_k[n]$ برای مقادیر مختلف k وابسته به هم باشند.

• با این وجود، اگر سیستم خطی نامتغیر با زمان باشد، می توان نوشت:

$$h_k[n] = h_0[n - k]$$

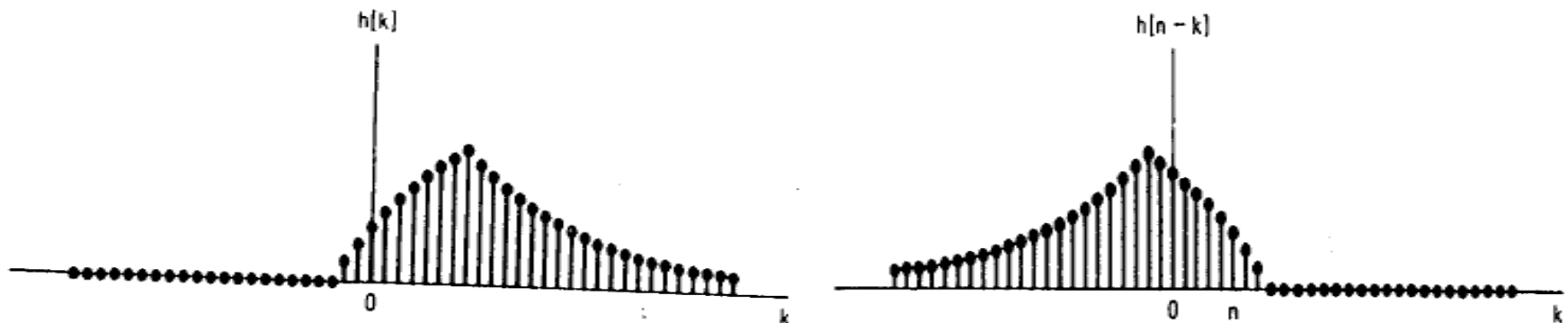
• اگر $h[n]$ پاسخ سیستم به $\delta[n]$ باشد، برای یک سیستم LTI خواهیم داشت:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]$$

- به رابطه بدست آمده، جمع کانولوشن گفته می شود.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

- رابطه بیان شده، پاسخ سیستم LTI به یک ورودی دلخواه را بر حسب جملاتی از پاسخ سیستم به سیگنال ضربه بیان می کند.
- بنابراین خروجی یک سیستم LTI را می توان به کمک پاسخ ضربه آن مشخص کرد.

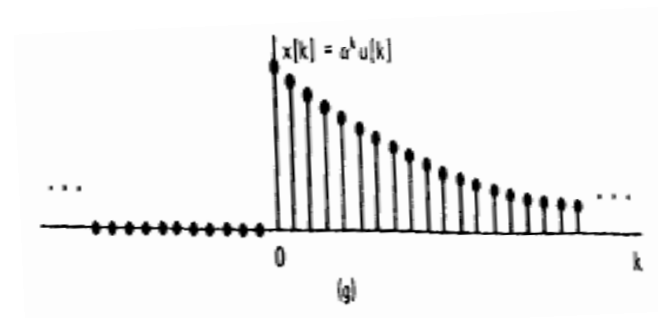
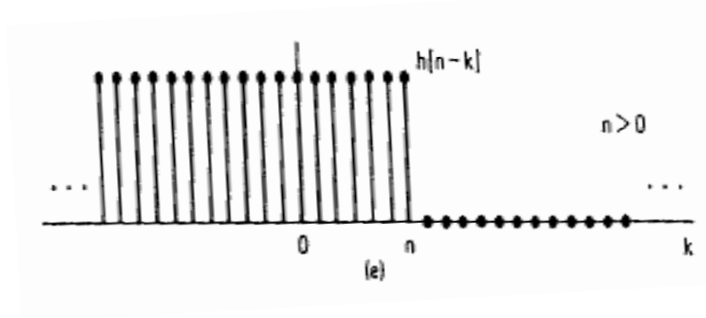
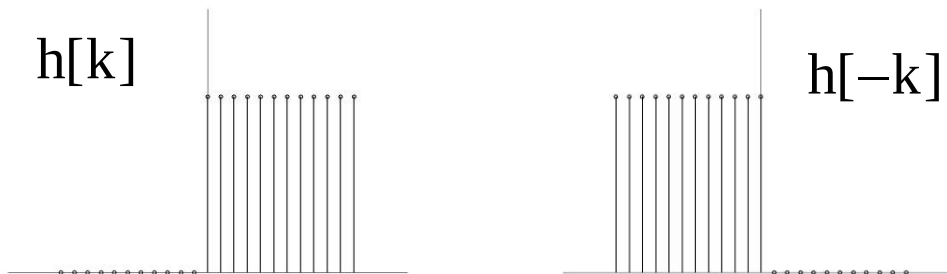


Lec. 2

• مثال:

$$x[n] = \alpha^n u[n], \quad 0 < \alpha < 1$$

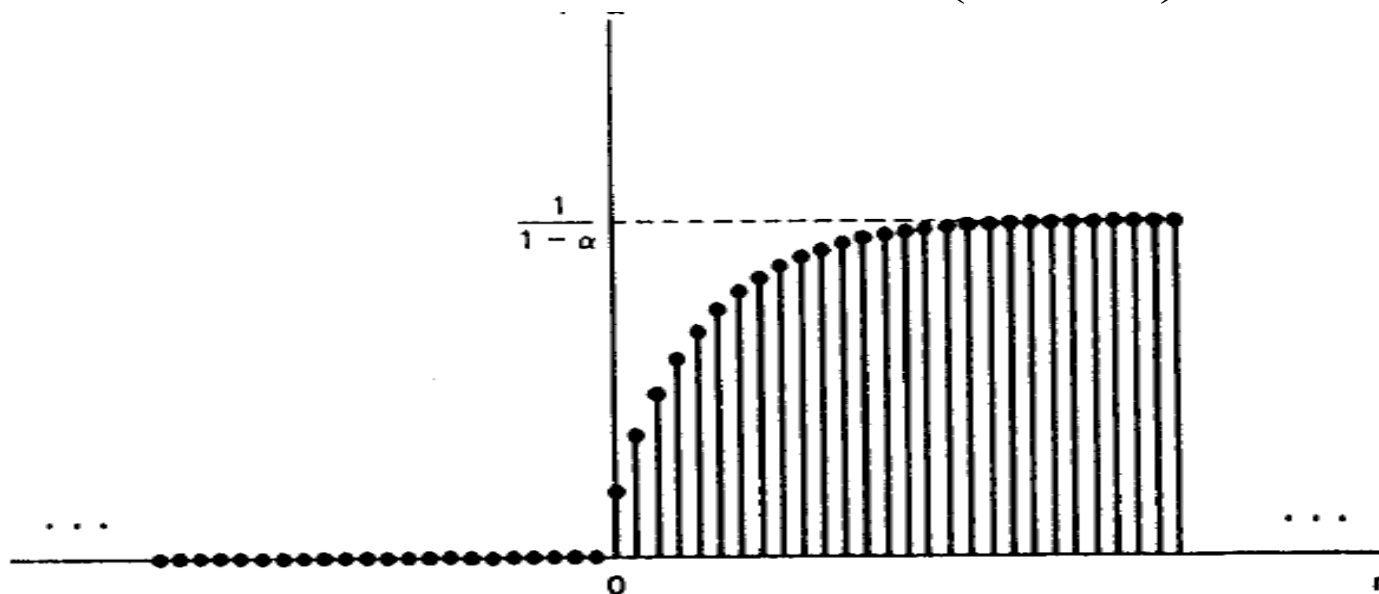
$$h[n] = u[n], \quad y[n] = x[n] * h[n] = ? \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k] h[n-k]$$



Lec. 2

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}, \quad n \geq 0 \quad y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \right) u[n]$$



$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

$$h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h[-k] = \begin{cases} \alpha^{-k}, & 0 \leq -k \leq 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-6 \leq k \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq n, 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad y[n] = \sum_{k=0}^n \alpha^{n-k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

Lec. 2

$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & 0 \leq k \leq 4, 4 < n \leq 6 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y[n] = \alpha^n \sum_{k=0}^4 (\alpha^{-1})^k = \alpha^n \frac{1 - \alpha^{-5}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

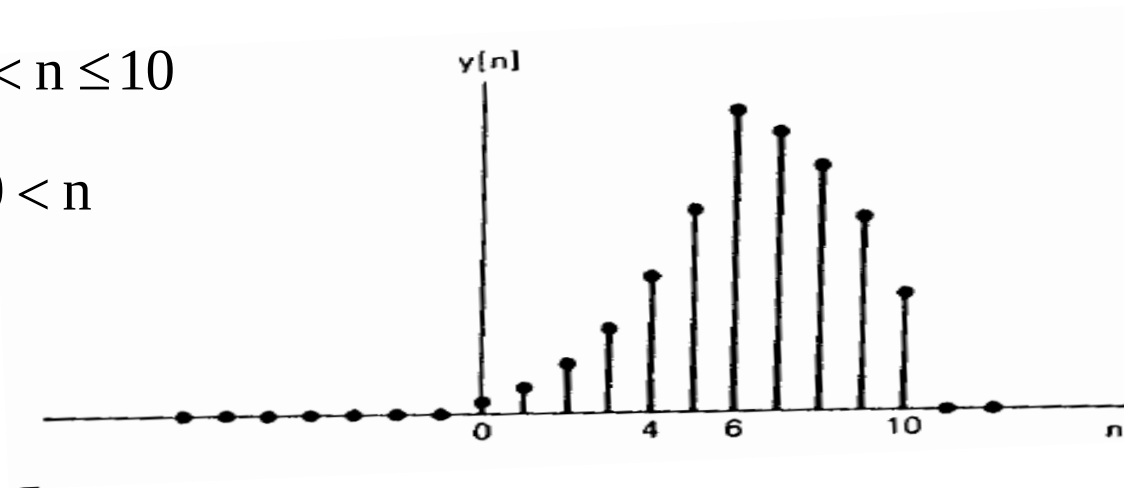
$$x[k]h[n-k] = \begin{cases} \alpha^{n-k}, & n-6 \leq k \leq 4, 6 < n \leq 10 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{k=n-6}^4 \alpha^{n-k} = \sum_{r=0}^{10-n} \alpha^{6-r} = \alpha^6 \sum_{r=0}^{10-n} (\alpha^{-1})^r = \alpha^6 \frac{1 - \alpha^{n-11}}{1 - \alpha^{-1}} = \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}$$

$$10 < n \Rightarrow x[k]h[n-k] = 0$$

Lec. 2

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 0 \leq n \leq 4 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}, & 4 < n \leq 6 \\ \frac{\alpha^{n-4} - \alpha^7}{1 - \alpha}, & 6 < n \leq 10 \\ 0, & 10 < n \end{cases}$$

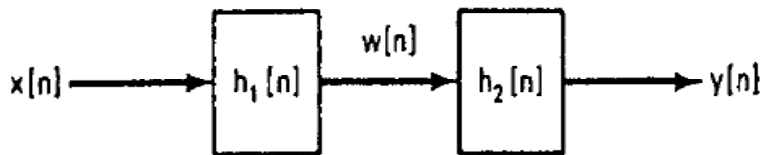


- جمع کانولوشن، یک عملگر جابجایی پذیر است،

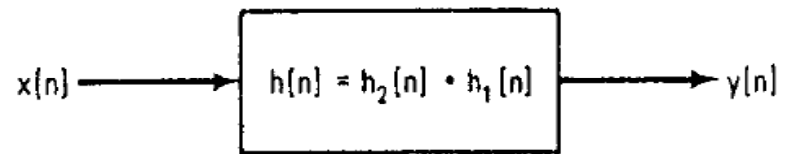
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$$

- جمع کانولوشن، دارای خاصیت شرکت پذیری می باشد،

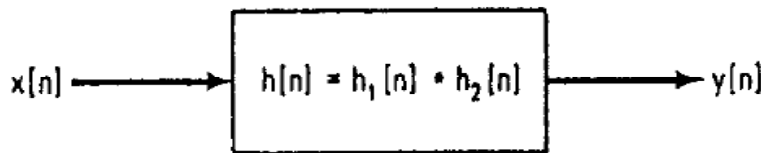
$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$



(a)



(c)



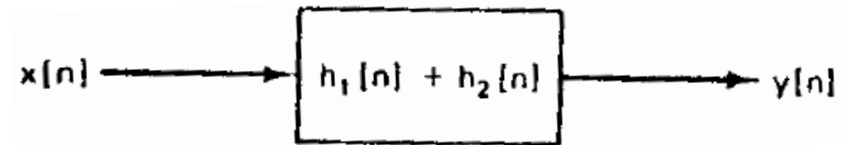
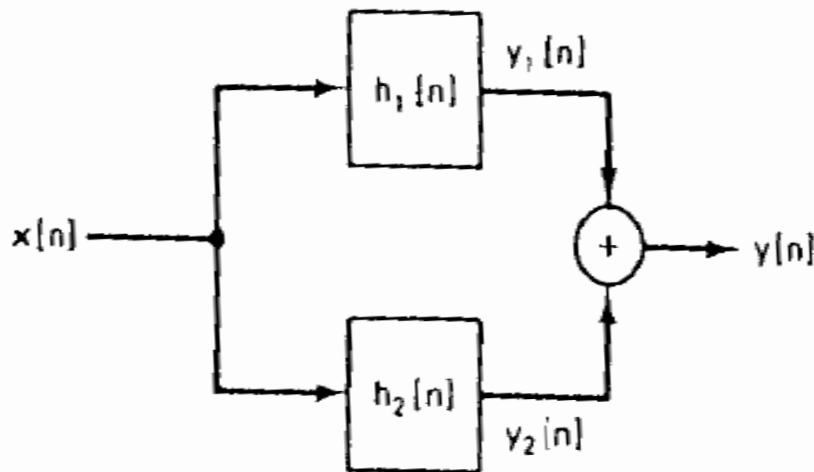
(b)



(d)

- جمع کانولوشن، خاصیت توزیع پذیری دارد.

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$$



- سه خاصیت بیان شده فقط در مورد سیستم‌های LTI صادق می‌باشد.

• سیستم‌های LTI زمان پیوسته: انتگرال کانولوشن

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta \\ \delta_{\Delta}(t - k\Delta) &\longrightarrow h_{k\Delta}(t) \end{aligned} \right\} \longrightarrow y(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) h_{k\Delta}(t) \Delta$$

- با فرض اینکه، $h_{\tau}(t)$ پاسخ سیستم به ضربه انتقال یافته $\delta(t - \tau)$ باشد، می‌توان نوشت:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{\tau}(t) d\tau$$

- برای سیستم‌های پیوسته نیز مانند سیستم‌های گسسته، اگر سیستم خطی نامتغیر با زمان باشد، خواهیم داشت:

$$h_{\tau}(t) = h_0(t - \tau)$$
- می‌توان از اندیس صفر صرف‌نظر کرد و $h(t)$ را به عنوان پاسخ سیستم به ضربه $\delta(t)$ در نظر گرفت. در این صورت می‌توان نوشت:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$
- رابطه اخیر، انتگرال کانولوشن نامیده می‌شود و آن را با نماد زیر نمایش می‌دهیم

$$y(t) = x(t) * h(t)$$
- سه خاصیت بیان‌شده برای کانولوشن گسسته، در مورد کانولوشن پیوسته نیز برقرار است.

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

جابجایی

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

شرکت پذیری

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) + (x(t) * h_2(t))$$

توزیع پذیری

$$x(t) = e^{-at}u(t),$$

مثال:

$$h(t) = u(t) \quad h(t - \tau) = u(t - \tau)$$

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 \leq \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_0^t e^{-a\tau}d\tau = \frac{1}{a}(1 - e^{-at})$$

مثال:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$h(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad h(t - \tau) = \begin{cases} t - \tau, & t - 2T < \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} t - \tau, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad 0 < t < T \quad y(t) = \int_0^t (t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} t^2$$

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} t - \tau, & 0 < \tau < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad T < t < 2T \quad y(t) = \int_0^T (t - \tau) d\tau = tT - \frac{1}{2} T^2$$

$$x(\tau)h(t - \tau) = \begin{cases} t - \tau, & t - 2T < \tau < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad 2T < t < 3T \quad y(t) = \int_{t-2T}^T (t - \tau) d\tau = -\frac{1}{2} t^2 + Tt + \frac{3}{2} T^2$$

$$x(\tau)h(t-\tau) = 0, \quad t < 0 \text{ or } t > 3T$$

$$y(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 < t < T \\ Tt - \frac{1}{2}T^2, & T < t < 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T < t < 3T \end{cases}$$

خواص سیستم‌های خطی نامتغیر با زمان

- دیدیم که پاسخ یک سیستم خطی نامتغیر با زمان در حالت گسسته و پیوسته به شکل زیر می‌باشد،

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

- از این دو رابطه می‌توان نتیجه گرفت که مشخصات یک سیستم بطور کامل بوسیله پاسخ ضربه آن سیستم قابل بیان است.

• سیستم‌های LTI با حافظه و بدون حافظه

- همانطور که قبلاً اشاره شد، سیستمی را بدون حافظه گویند که مقدار خروجی آن در هر لحظه از زمان فقط به مقدار ورودی در همان لحظه وابسته باشد. با توجه به دو رابطه بیان شده در اسلاید قبل، تنها در صورتی یک سیستم گسسته بدون حافظه خواهد بود که داشته باشیم:

$$h[n] = 0, \quad \text{if } n \neq 0$$

- در اینصورت پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر درخواهد آمد:

$$h[n] = K\delta[n] \longrightarrow y[n] = Kx[n]$$

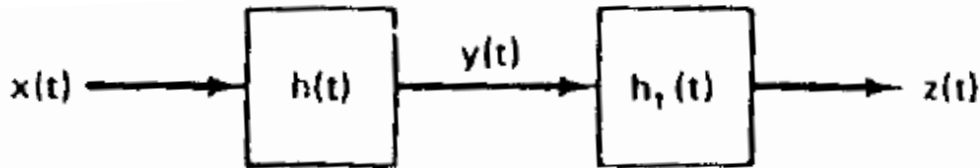
- در صورتی سیستم حافظه‌دار خواهد بود که $h[n]$ حداقل برای یک $n \neq 0$ ، مخالف صفر باشد.

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- در مورد سیستم‌های پیوسته نیز به همین شکل خواهد بود. سیستمی حافظه‌دار خواهد بود که در برخی زمانهای غیر صفر $h(\tau) \neq 0$ باشد.

• معکوس‌پذیری سیستم‌های LTI

- یک سیستم LTI را معکوس‌پذیر گویند، هرگاه بتوان یک سیستم معکوس را به گونه‌ای طراحی کرد که در صورتی که با سیستم اصلی به صورت سری قرار بگیرد، خروجی آن برابر سیگنال ورودی به سیستم اصلی باشد. به عبارت دیگر معکوس هر سیستم LTI معکوس‌پذیر، خود یک سیستم LTI خواهد بود.



• شرط معکوس پذیری،

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

• مثال:

$$y(t) = x(t - t_0) \longrightarrow h(t) = \delta(t - t_0)$$

$$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$$

$$h_1(t) = \delta(t + t_0)$$

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t - t_0) * \delta(t + t_0) = \delta(t)$$

$$h[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[n-k]x[k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

• مثال:

$$y_1[n] = x[n] - x[n-1] \quad \text{if } x[n] = \delta[n] \Rightarrow h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$h[n] * h_1[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = u[n] - u[n-1] = \delta[n]$$

• علی بودن سیستم‌های LTI

– یک سیستم LTI را علی گویند، هرگاه خروجی آن در هر لحظه از زمان تنها به مقادیر حال و گذشته ورودی وابسته باشد.

- با توجه به رابطه جمع کانولوشن، برای یک سیستم LTI علی خواهیم داشت:

$$\text{for } n < 0 \quad h[n] = 0,$$

$$\text{for } t < 0 \quad h(t) = 0,$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

- **مثال:** اگر $t_0 \geq 0$ باشد، سیستم علی و اگر $t_0 < 0$ باشد، سیستم غیرعلی خواهد بود.

$$h(t) = \delta(t - t_0)$$

• پایداری سیستم‌های LTI

– با توجه به آنچه گفته شد، یک سیستم علی پایدار خواهد بود، اگر هر ورودی محدود، یک خروجی محدود را ایجاد کند.

– برای بیان شرط پایداری یک سیستم LTI، می‌توان به شکل زیر عمل کرد،

$$\begin{aligned}
 |x[n]| &\leq B \\
 |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| |x[n-k]| \\
 &\leq B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|
 \end{aligned}$$

- به عبارت دیگر، پاسخ ضربه واحد سیستم باید جمع پذیر باشد $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty$ و این یک شرط لازم و کافی می باشد.

- برای سیستم های پیوسته خواهیم داشت،

$$|x(t)| \leq B$$

$$|y(t)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau$$

$$\leq B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau$$

- با توجه به رابطه بیان شده، یک سیستم پیوسته پایدار است، اگر و فقط اگر پاسخ ضربه آن انتگرال پذیر باشد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$$

• پاسخ پله واحد یک سیستم LTI

- همانطور که قبلاً دیدیم نمایش یک سیستم بر حسب جملاتی از پاسخ ضربه این امکان را در اختیار ما قرار می‌دهد که ویژگی‌های صریحی را از خواص سیستم بدست آوریم.
- سیگنال دیگری که می‌تواند برای توصیف رفتار یک سیستم مناسب باشد، پاسخ پله واحد است که آن را با $s[n]$ یا $s(t)$ نمایش می‌دهیم.

$$s[n] = u[n] * h[n] = h[n] * u[n]$$

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \Rightarrow h[n] = s[n] - s[n-1]$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \Rightarrow h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

- بنابراین هم برای سیستم‌های گسسته و هم برای سیستم‌های پیوسته، پاسخ پله واحد را می‌توان برای تعیین ویژگی‌های یک سیستم استفاده کرد. چون به کمک آن می‌توان پاسخ ضربه واحد را استخراج کرد.

سیستم‌های توصیف‌شده با معادلات دیفرانسیلی و تفاضلی

- دسته وسیعی از سیستم‌های پیوسته، سیستم‌هایی هستند که ورودی و خروجی آنها از طریق یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت با یکدیگر ارتباط دارند.
- پاسخ یک مدار RLC را می‌توان به یک معادله دیفرانسیل توصیف کرد.
- یک دسته وسیع از سیستم‌های گسسته، سیستم‌هایی هستند که به کمک یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت توصیف می‌شوند.
- مثال: بررسی معادله

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t)$$

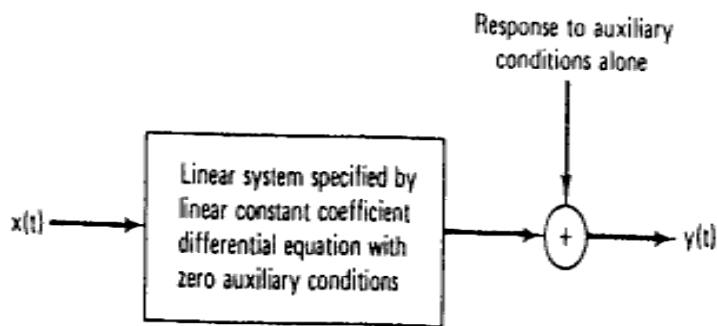
$$y(t) = y_0 e^{-2t} + \frac{k}{\sqrt{4 + \omega_0^2}} \left[\cos(\omega_0 t - \theta) - e^{-2t} \cos \theta \right] u(t) \quad \theta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega_0}{2} \right)$$

• آیا این سیستم خطی است؟

– ورودی صفر باید خروجی صفر را نتیجه دهد.

if $k = 0 \Rightarrow x(t) = 0, y(t) = y_0 e^{-2t} \neq 0$

– همانطور که مشاهده می‌کنید با یک سیستم خطی توسعه یافته سروکار داریم. برای چنین سیستمی می‌توان شماتیک زیر را در نظر گرفت:



- به عبارت دیگر، پاسخ سیستم از دو بخش تشکیل می‌گردد:
 - پاسخ یک سیستم خطی با شرایط کمکی صفر (پاسخ حالت صفر)
 - پاسخ سیستم فقط به شرایط کمکی غیر صفر (پاسخ ورودی صفر)
 - در ادامه به بررسی علی بودن این نوع سیستم‌ها می‌پردازیم.
 - علی بودن اینگونه سیستم‌ها وابسته به یک ویژگی تحت عنوان سکون اولیه خواهد بود. این ویژگی بیان می‌کند که اگر برای یک زمان خاص مانند $t < t_0$ ، ورودی سیستم صفر باشد، خروجی سیستم نیز باید صفر باشد.
- $$\text{for } t < t_0 : x(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$$

- یک مثال: مثال قبل را با در نظر گرفتن شرایط کمکی صفر در نظر بگیرید

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0) = 0$$

$$x(t) = k \cos(\omega_0 t)$$

$$x_1(t) = 0 \text{ for all } t \Rightarrow y_1(t) = 0 \text{ for all } t$$

$$x_2(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ 1, & t > -1 \end{cases} \Rightarrow y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \quad t > -1$$

$$\text{for } t < -1: y_2(t) = Be^{-2t}$$

$$t = -1: Be^2 = \frac{1}{2}(1 - e^2) \Rightarrow B = \frac{1}{2}(e^{-2} - 1)$$

for $t < -1$: $y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^2)e^{-2(t+1)}$

for $t < -1$: $x_1(t) = x_2(t)$ but $y_1(t) \neq y_2(t)$

- در نتیجه سیستم علی نمی باشد.

- حال همین سیستم را با سکون اولیه در نظر بگیرید، در این صورت خواهیم داشت،

$$y_2(t = -1) = 0$$

$$y_2(t) = Ae^{-2t} + \frac{1}{2} \quad y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t+1)}), \quad t > -1$$

$$A = -\frac{1}{2}e^{-2} \quad y_2(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2(t+1)})u(t+1)$$

- با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که در نظر گرفتن شرایط کمکی در یک نقطه ثابت زمانی منجر به غیر علی شدن سیستم خواهد شد (البته باید توجه داشت در حالتی که ورودی مشخص باشد)
- دلیل اینکه سیستم غیر علی می‌شود این است که خروجی سیستم باید به گونه‌ای تعیین شود که یک شرط کمکی را در آینده برآورده سازد به عبارت دیگر ورودی در لحظه حال به خروجی سیستم در آینده ارتباط پیدا خواهد کرد.
- در حالیکه زمانی که از سکون اولیه استفاده می‌شود، این شرط در لحظه‌ای به سیستم اعمال می‌شود که ورودی سیستم از حالت صفر خارج می‌گردد و پدیده پیش‌بینی کردن آینده رخ نمی‌دهد.

- به این ترتیب اگر برای لحظات $t < t_0$ ورودی سیستم صفر باشد، کافی معادله حاکم بر سیستم را تنها برای لحظات $t > t_0$ حل کرده و از شرط $y(t_0) = 0$ کمک بگیریم. چنین شرطی، شرط اولیه نامیده می‌شود.

- سکون اولیه همچنین نامتغیر با زمان بودن سیستم را تضمین می‌کند. برای نشان دادن این موضوع داریم،

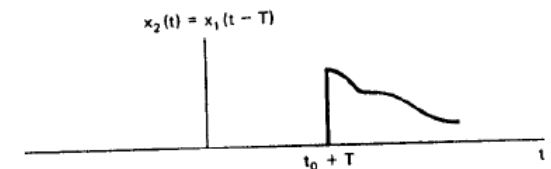
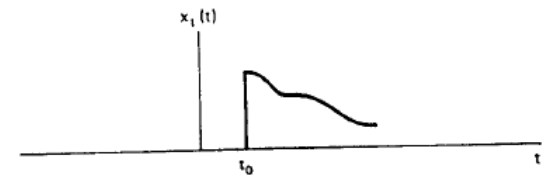
$$\frac{dy_1(t)}{dt} + 2y_1(t) = x_1(t) \quad y_1(t_0) = 0$$

$$x_2(t) = x_1(t - T)$$

$$y_2(t_0 + T) = 0$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + 2y_2(t) = x_2(t)$$

$$y_2(t) = y_1(t - T)$$



- شکل کلی یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت به شکل زیر می باشد،

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- اگر $N = 0$ باشد،

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

- در چنین حالتی، خروجی تابع صریحی از ورودی خواهد بود ولی در حالتی که کلی، خروجی تابع ضمنی از ورودی می باشد.
- همانطور که در مثال بیان شده دیدیم خروجی را تنها نمی توان با ورودی تعیین کرد بلکه برای مشخص شدن خروجی به طور کامل نیازمند شرایط کمکی هستیم.

- این شرایط به شکل زیر قابل بیان می باشد، که باید در تعدادی نقطه دارای مقداری مشخص باشند.

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \dots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

- سیستم با معادله دیفرانسیل بیان شده، خطی خواهد بود، هرگاه تمام شرایط کمکی بیان شده برابر صفر باشد. در صورت مخالف صفر بودن این شرایط یک سیستم خطی توسعه ای خواهیم داشت.

- به منظور اینکه سیستم علی باشد، باید سکون اولیه داشته باشیم،

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

• معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت

- این معادلات برای توصیف سیستم‌های گسسته خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- مشابه معادلات دیفرانسیلی، پاسخ این نوع معادلات را می‌توان به صورت مجموع یک پاسخ خصوصی و پاسخ معادله همگن زیر بیان کرد و برای بدست آوردن پاسخ کامل نیازمند شرایط کمکی خواهیم بود

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = 0$$

- چنین سیستمی، یک سیستم خطی توسعه یافته خواهد بود که پاسخ آن مجموع پاسخ سیستم به شرایط کمکی به تنهایی و پاسخ یک سیستم خطی به ورودی با در نظر گرفتن شرایط کمکی صفر خواهد بود.

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$

- معادله بالا، یک معادله بازگشتی نامیده می‌شود.
- در یک حالت خاص اگر $N = 0$ باشد،

$$y[n] = \sum_{k=0}^M \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

- چنین سیستمی غیربازگشتی بوده و نیازی به شرایط کمکی ندارد.
- پاسخ ضربه این سیستم به شکل زیر خواهد بود،

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0}, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- همانطور که مشاهده می‌کنید، این سیستم پاسخ ضربه‌ای روی یک باز محدود خواهد داشت. چنین سیستمی FIR (دارای پاسخ ضربه محدود) نامیده می‌شود.

• مثال:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$$

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}y[n-1] \quad \text{if } x[n] = K\delta[n], \quad y[-1] = a$$

$$y[0] = K + \frac{1}{2}a$$

$$y[1] = \frac{1}{2}y[0] = \frac{1}{2}\left(K + \frac{1}{2}a\right)$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(K + \frac{1}{2}a\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + \left(\frac{1}{2}\right)^n K, \quad n \geq 0$$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(K + \frac{1}{2}a\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + \left(\frac{1}{2}\right)^n K, \quad n \geq 0$$

$$y[n-1] = 2\{y[n] - x[n]\} \quad y[-1] = a$$

$$y[-2] = 2\{y[-1] - x[-1]\} = 2a$$

$$y[-3] = 2\{y[-2] - x[-1]\} = 2^2 a$$

$$y[-n] = 2\{y[-n+1] - x[-n+1]\} = 2^{n-1} a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n+1} a$$

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} a + K \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

- اگر ورودی صفر باشد ($K=0$)، خروجی صفر نخواهد بود مگر اینکه شرایط کمکی صفر باشد. در این نوع سیستم‌ها، به منظور اطمینان از خطی و علی بودن سیستم، باید شرایط سکون اولیه در نظر گرفته شود.

$$x[n]=0 \text{ for } n \leq n_0 \text{ then } y[n]=0 \text{ for } n \leq n_0$$

- در چنین شرایطی باید معادله تفاضلی را برای $n_0 < n$ با در نظر گرفتن شرایط اولیه $y[n_0]=0$ حل کنیم.

- در چنین شرایطی، نه تنها سیستم خطی و علی خواهد بود بلکه نامتغیر با زمان نیز خواهد بود.

- با فرض شرایط سکون اولیه، پاسخ سیستم به شکل زیر خواهد بود

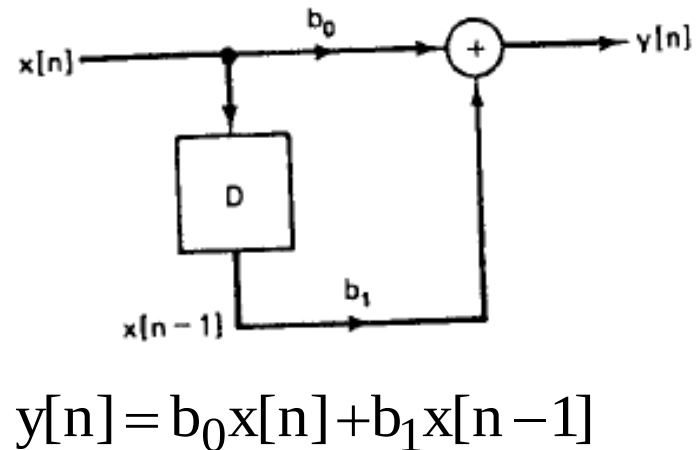
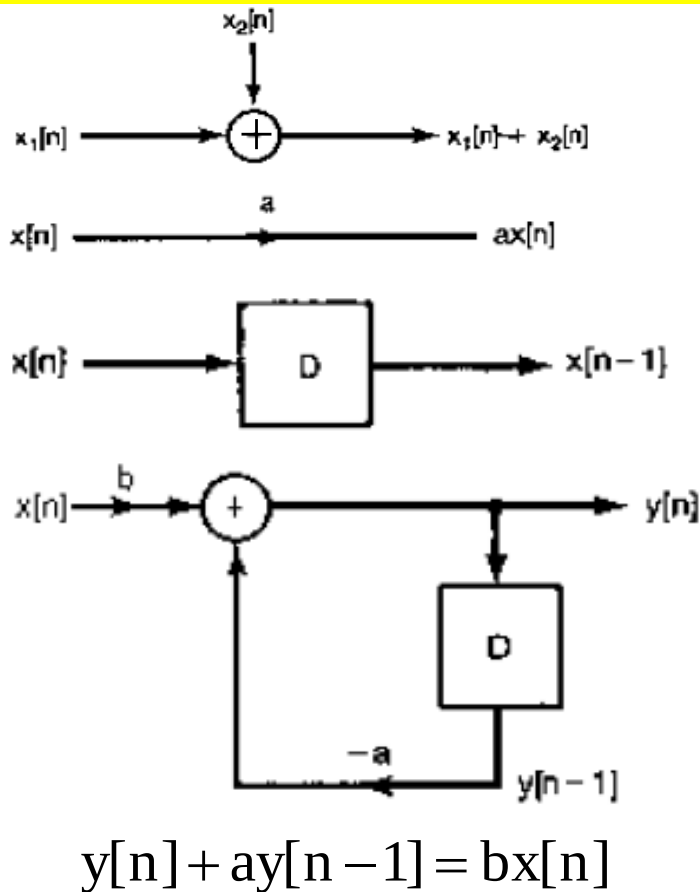
$$y[n] = K \left(\frac{1}{2} \right)^n u[n]$$

- همانطور که دیدیم، می توان گفت سیستم LTI که بوسیله یک معادله تفاضلی بازگشتی توصیف می شود، یک پاسخ ضربه در یک بازه نامحدود دارد. به همین خاطر سیستمی که با یک معادله تفاضلی بازگشتی توصیف می شود، سیستم با پاسخ ضربه نامحدود (IIR) نامیده می شود.

نمایش بلوک دیاگرامی سیستم‌های LTI توصیف‌شده با معادلات تفاضلی و دیفرانسیلی

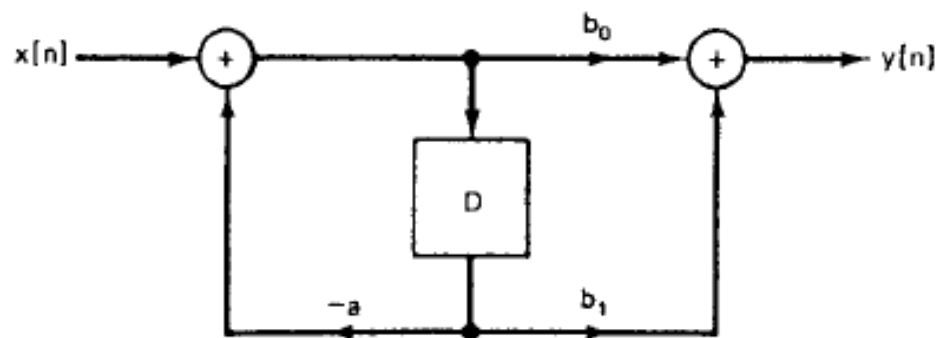
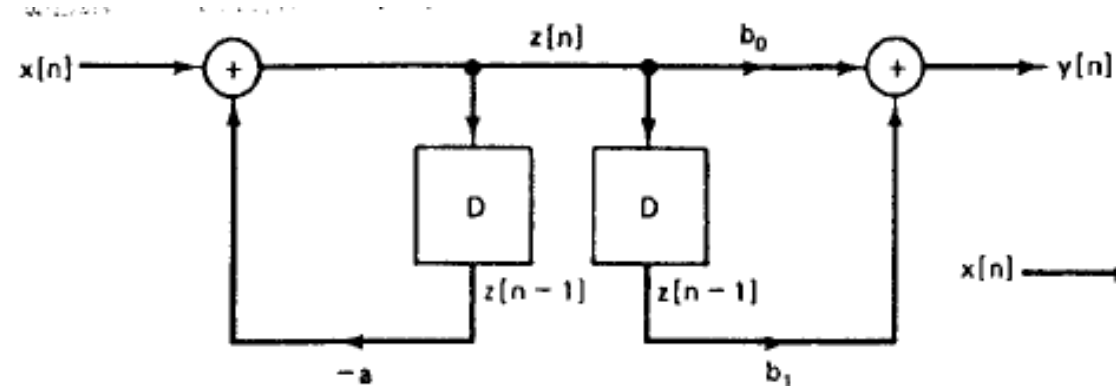
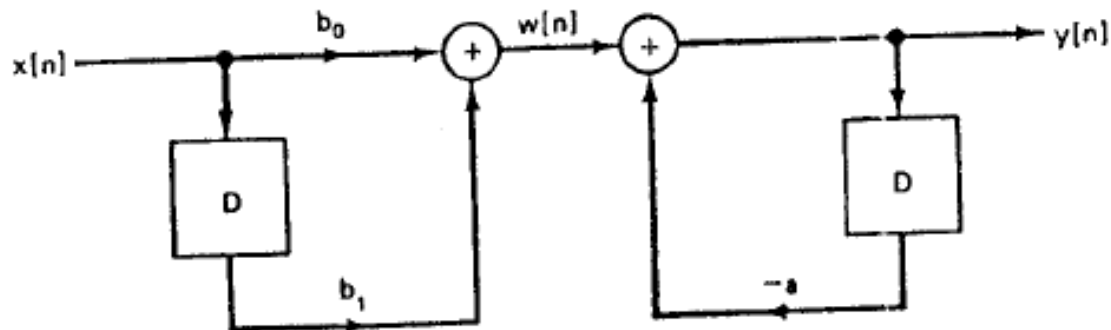
• سیستم‌های تفاضلی:

– عناصر پایه: جمع، ضرب، تأخیر



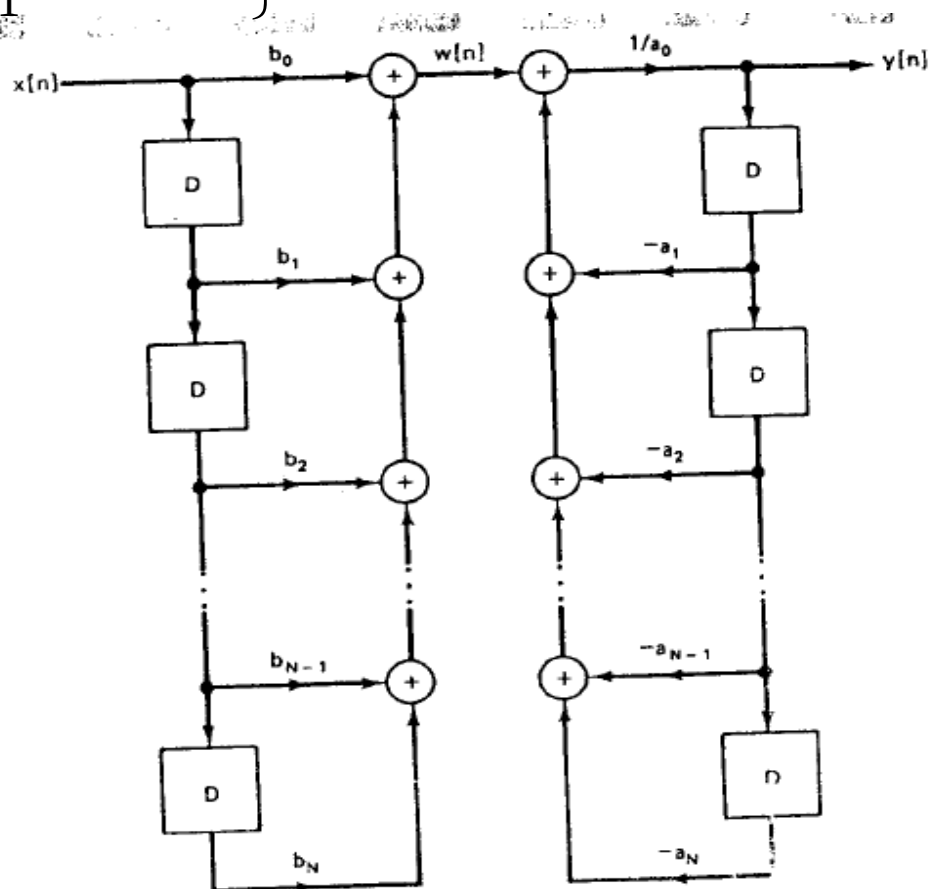
Lec. 2

$$y[n] + ay[n-1] = b_0x[n] + b_1x[n-1]$$

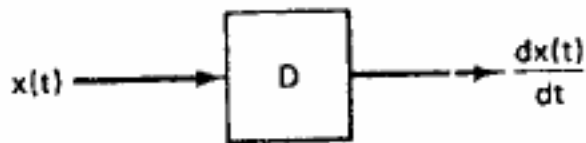
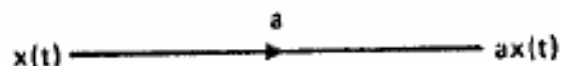
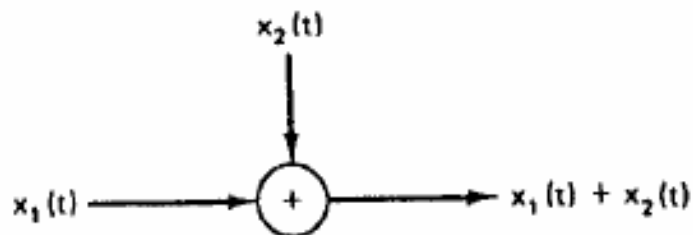


Lec. 2

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] \right\}$$



Lec. 2



• سیستم‌های دیفرانسیلی

– عناصر پایه: جمع، ضرب، تأخیر

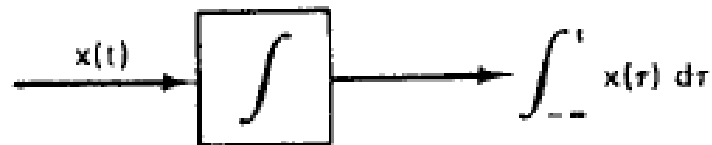
– تعریف انتگرال

$$y_{(0)}(t) = y(t),$$

$$y_{(1)}(t) = y(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y(\tau) d\tau$$

$$y_{(2)}(t) = y_{(1)}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y_{(1)}(\tau) d\tau$$

$$y_{(k)}(t) = y_{(k-1)}(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t y_{(k-1)}(\tau) d\tau$$



$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

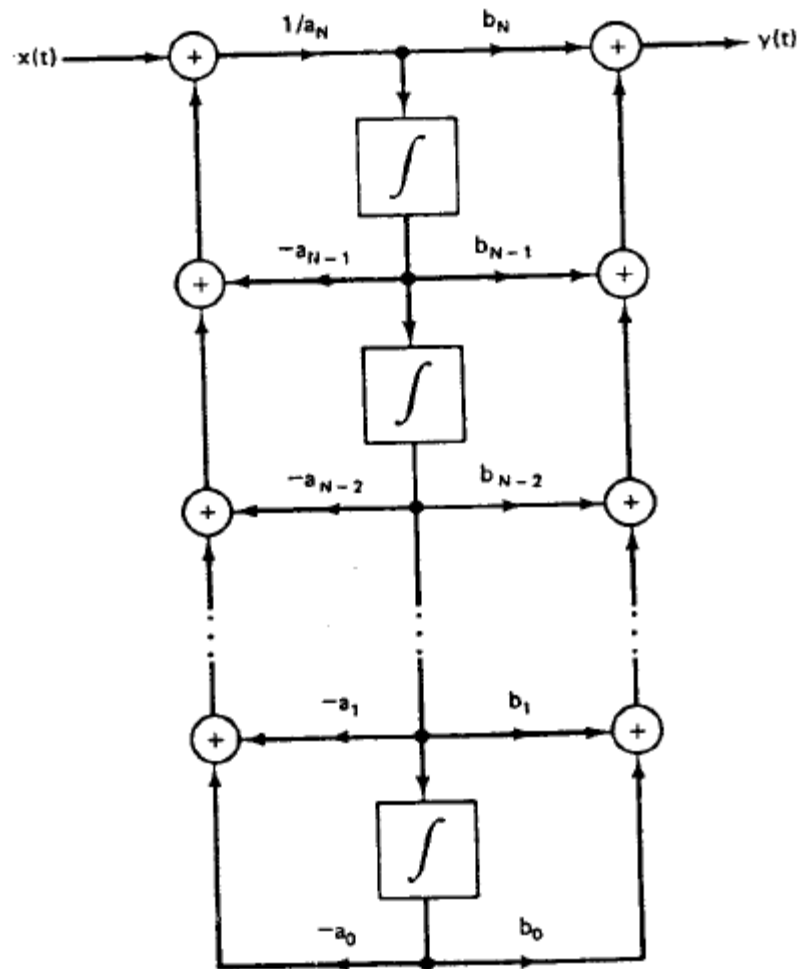
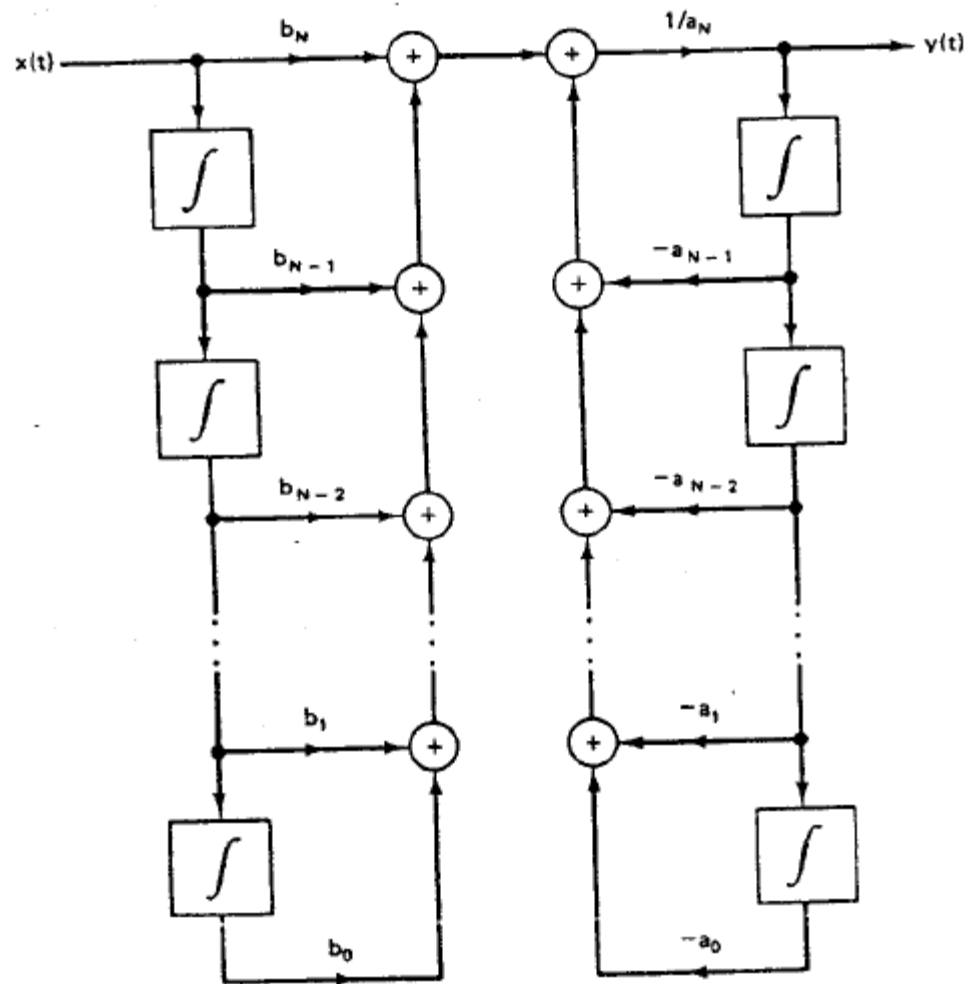
• با در نظر گرفتن سکون اولیه، N ام انتگرال $\frac{d^k y(t)}{dt^k}$ برابر خواهد شد با

$$y_{(N-k)}(t)$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)}(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^N b_k x_{(N-k)} - \sum_{k=1}^{N-1} a_k y_{(N-k)}(t) \right\}$$

Lec. 2



بحث: توابع تکین (Singular Functions) (مطالعه آزاد)

- بررسی خواص تابع ضربه و نحوه ساخته شدن آن با توابع گوناگون مورد بررسی قرار می گیرد.