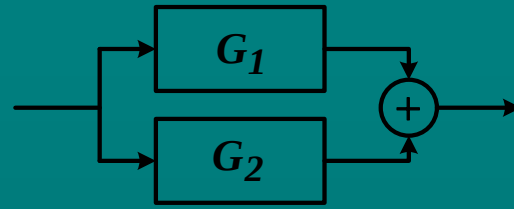


University
of Tehran



Faculty of
Engineering

*Fourier Analysis
for
Continuous Time Signal and Systems*

Signals & Systems

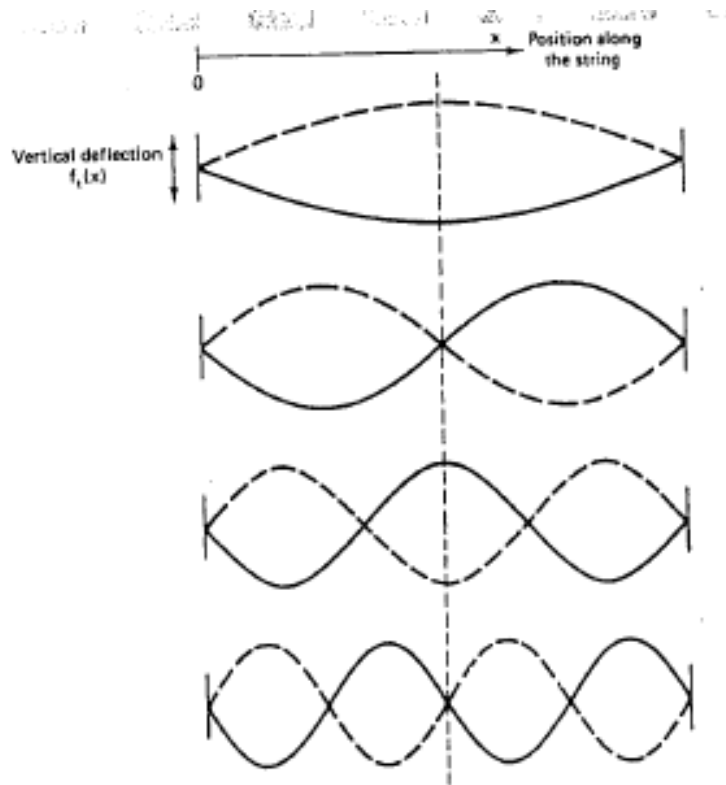
Lecture 3

• چرا تبدیل فوریه؟

- همانطور که خواهیم دید، می‌توان هر سیگنال برحسب یکسری توابع سینوسی به کمک تبدیل فوریه بیان کرد. از طرفی توابع سینوسی به نوعی با توابع نمایی مختلط هم خانواده هستند.
- پاسخ سیستم‌های LTI به نمایی مختلط شکل ساده‌ای دارد و همین امر باعث می‌شود که سیستم‌های LTI را بتوان به شکل دیگری نمایش داد.
- در نهایت با توجه به اصل جمع آثار و آنچه در بالا بیان شد می‌توان خواص دیگری از سیستم‌های LTI در تحلیل این سیستم‌ها را بیان کرد.

Lec. 3

- تبدیل فوریه، بیان یک سیگنال بر حسب توابع نمایی مختلط می باشد.



• پاسخ سیستم‌های LTI پیوسته به ورودی نمایی مختلط

- همانطور که قبلاً اشاره شد، یکی از مزایای سیستم‌های LTI این است که برای این سیستم‌ها سیگنال‌های ورودی را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از سیگنال‌های پایه در نظر گرفت که ۲ خاصیت زیر را برآورده سازند:
- این سیگنال‌های پایه را بتوان برای ساختن یک کلاس از سیگنال‌ها استفاده کرد.
- پاسخ سیستم به هر کدام از این سیگنال‌های پایه ساختار ساده‌ای داشته باشد بطوریکه بتوان از آنها برای ساختن پاسخ یک سیستم به هر سیگنالی که به صورت ترکیبی خطی از این سیگنال‌های پایه ساخته شده است استفاده کرد.

- برای سیستم‌های LTI، این دو مزیت بوسیله مجموعه‌ای از سیگنال‌های نمایی مختلط به فرم e^{st} فراهم می‌شود. بطوریکه s یک متغیر مختلط به شکل زیر می‌باشد.

$$s = \sigma + j\omega$$
- مهمترین ویژگی سیگنال‌های نمایی مختلط در مطالعه سیستم‌های LTI این است که پاسخ یک سیستم LTI به یک سیگنال نمایی مختلط، خود یک سیگنال نمایی مختلط می‌باشد که دامنه آن تغییر کرده است.

$$e^{st} \xrightarrow{\text{LTI}} H(s)e^{st}$$
- سیگنالی که برای آن خروجی سیستم به شکل یک ثابت (حتی مختلط) ضرب در ورودی بیان می‌شود، تابع ویژه (Eigfunction) آن سیستم نامیده می‌شود.

- ضرب ثابت، مقدار ویژه (Eigenvalue) نامیده خواهد شد.
- سیگنال‌های نمایی مختلط، توابع ویژه سیستم‌های LTI هستند، برای نشان دادن این موضوع یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
 x(t) = e^{st} \quad y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau \\
 &= e^{st}H(s)
 \end{aligned}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau}h(\tau)d\tau$$

• مثال:

$$x(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{s_i t} \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = \sum_{i=1}^n H(s_i) e^{s_i t}$$

• این کاری بود که اوایلر برای بدست آوردن معادله موج یک سیم مرتعش انجام داد و در ادامه سری فوریه و تبدیل فوریه توسط آقای فوریه مطرح شد.

• در ادامه متغیر مختلط s به شکل خاص زیر در نظر خواهیم گرفت.

$$s = j\omega$$

• به این ترتیب تابع نمایی مختلط e^{st} به شکل $e^{j\omega t}$ در خواهد آمد

نمایش سیگنال‌های متناوب: سری فوریه پیوسته

- فرض کنید $x(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب T باشد،

$$x(t + T) = x(t)$$

- همانطور که در مورد این سیگنال دیدیم، کوچکترین T مثبت که معادله بالا را برآورده سازد (T_0)، دوره تناوب اصلی نامیده می‌شود و $\frac{2\pi}{T_0}$ فرکانس اصلی خواهد بود

- حال تابع $e^{j\omega_0 t}$ را در نظر بگیرید یک تابع متناوب با فرکانس اصلی ω_0 و دوره تناوب اصلی $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ می‌باشد. در اینصورت توابع هارمونیکی زیر نیز متناوب با دوره تناوب T_0 خواهند بود.

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- ترکیب خطی این توابع نیز تابعی متناوب با دوره تناوب T_0 خواهد بود.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

- جملاتی با $k = \pm 1$ دارای دوره تناوب اصلی برابر T_0 بوده و هارمونیک‌های اصلی نامیده می‌شوند. جملاتی با $k = \pm N$ هارمونیک‌های N ام نامیده می‌شوند.
- نمایش یک تابع متناوب به فرم رابطه بالا، سری فوریه تابع نامیده می‌شود.

- فرض کنید $x(t)$ یک تابع حقیقی باشد، در اینصورت می توان نوشت:

$$x^*(t) = x(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} \xrightarrow{k \rightarrow -k} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k^* = a_{-k}$$

- اگر a_k حقیقی باشند، $a_k = a_{-k}$ حاصل خواهد شد.
- در حالت کلی برای یک سیگنال متناوب می توان نوشت:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}$$

• اگر سیگنال حقیقی باشد، خواهیم داشت:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ a_k e^{jk\omega_0 t} \right\}$$

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ A_k e^{j\theta_k} e^{jk\omega_0 t} \right\} = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

$$\text{if } a_k = B_k + jC_k \quad x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\text{LTI}} y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

نمایش سری فوریه سیگنال‌های متناوب

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t},$$

$$x(t) e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t},$$

$$\int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\int_0^T e^{j(k-n)\omega t} dt = \int_0^T \cos(k-n)\omega t dt + j \int_0^T \sin(k-n)\omega t dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

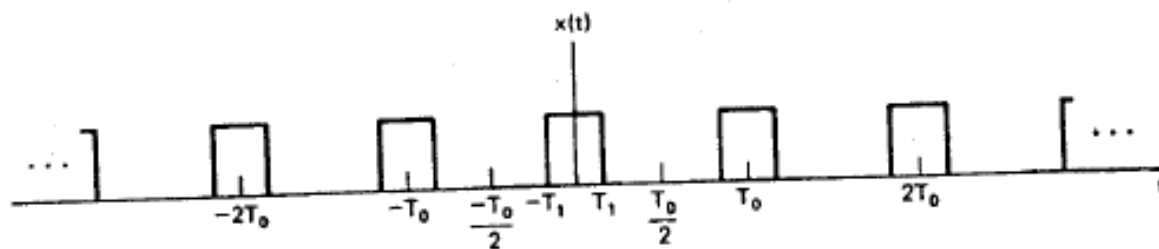
Lec. 3

$$\int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T_0, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) dt$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T_0}{2} \end{cases}$$

• مثال:



$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T_0}$$

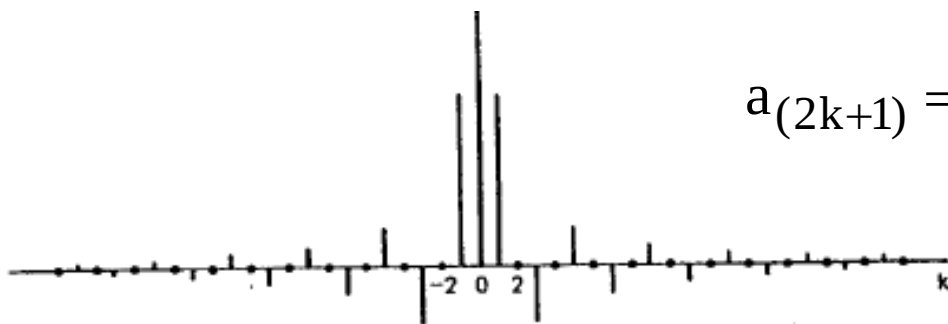
Lec. 3

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1}$$

$$a_k = \frac{2}{k\omega_0 T_0} \left[\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{2j} \right]$$

$$a_k = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_0} = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

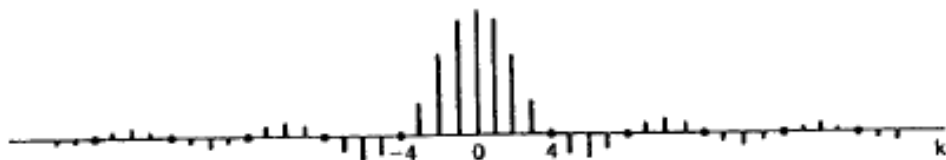
$$T_0 = 4T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{2} \quad a_k = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$



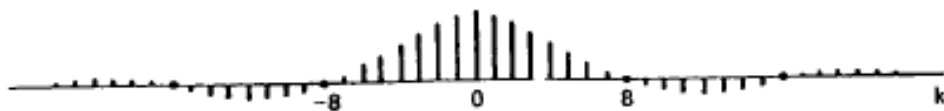
$$a_{(2k+1)} = a_{-(2k+1)} = (-1)^k \frac{1}{(2k+1)\pi}$$

Lec. 3

$$T_0 = 8T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{4}$$



$$T_0 = 16T_1 \Rightarrow \omega_0 T_1 = \frac{\pi}{8}$$



تقریب سیگنال‌های متناوب به کمک سری فوریه

- فرض کنید $x_N(t)$ تقریبی از $x(t)$ باشد.

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

...

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$E_N = \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \int_{T_0} e_N(t) e_N^*(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- در بعضی از مواقع ممکن سری فوریه بدست آمده برای یک سیگنال متناوب معتبر نباشد. به عبارت دیگر سری فوریه بدست آمده به سیگنال مورد نظر همگرا نشود.

- می‌توان زمانی سری فوریه ارائه شده برای یک سیگنال پیوسته معتبر است که حد انرژی خطا بین تقریب تابع و خود تابع با میل کردن N به بینهایت به صفر همگرا شود.
- می‌توان برای اطمینان از اینکه یک سیگنال متناوب قابل نمایش به کمک یک سری فوریه باشد یا خیر، یکسری شرایط را وضع کرد.
- به عنوان مثال، تمام سیگنال‌هایی که روی یک دوره تناوب انرژی محدود دارند به کمک یک سری فوریه قابل نمایش هستند.

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- می‌توان شرایط همگرایی سری فوریه یک تابع به مقدار تابع تحت عنوان شرایط دریکله به شکل زیر بیان کرد،

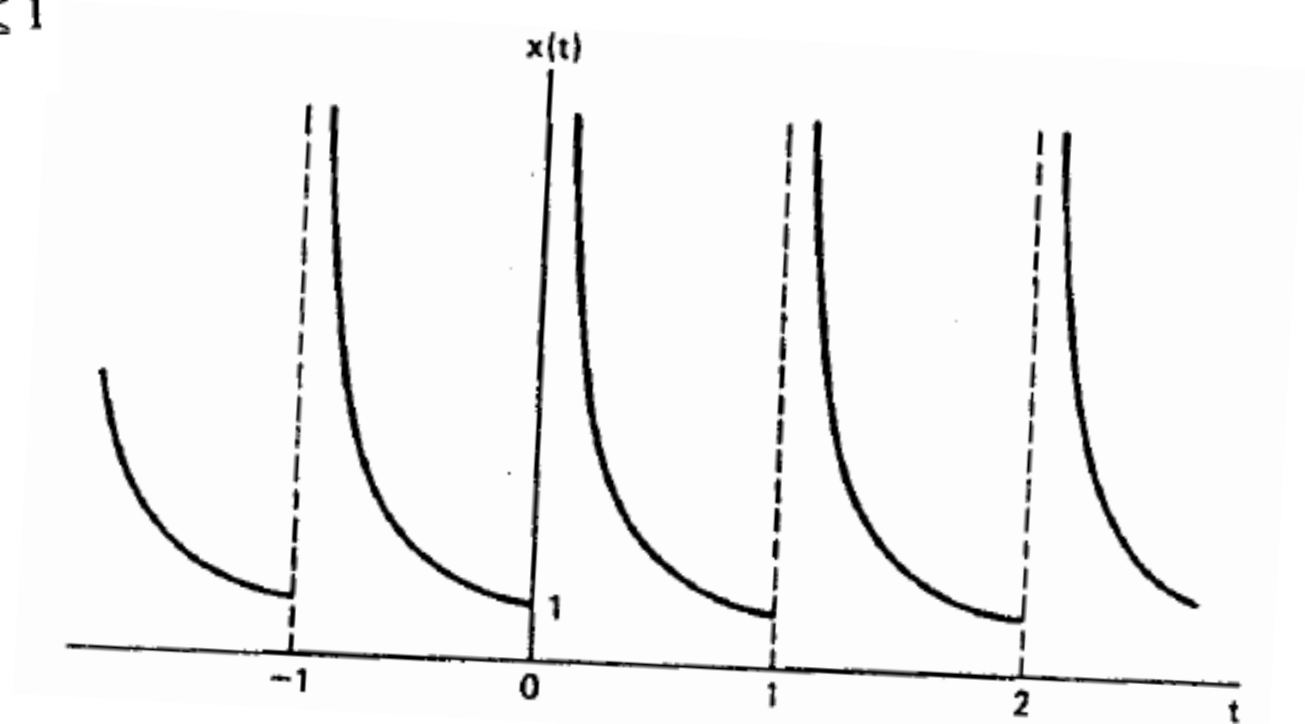
– شرط اول: تابع $x(t)$ در یک دوره تناوب به صورت مطلق انتگرال پذیر باشد،

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt \quad |a_k| < \infty$$

Lec. 3

$$x(t) = \frac{1}{t}, \quad 0 < t \leq 1$$

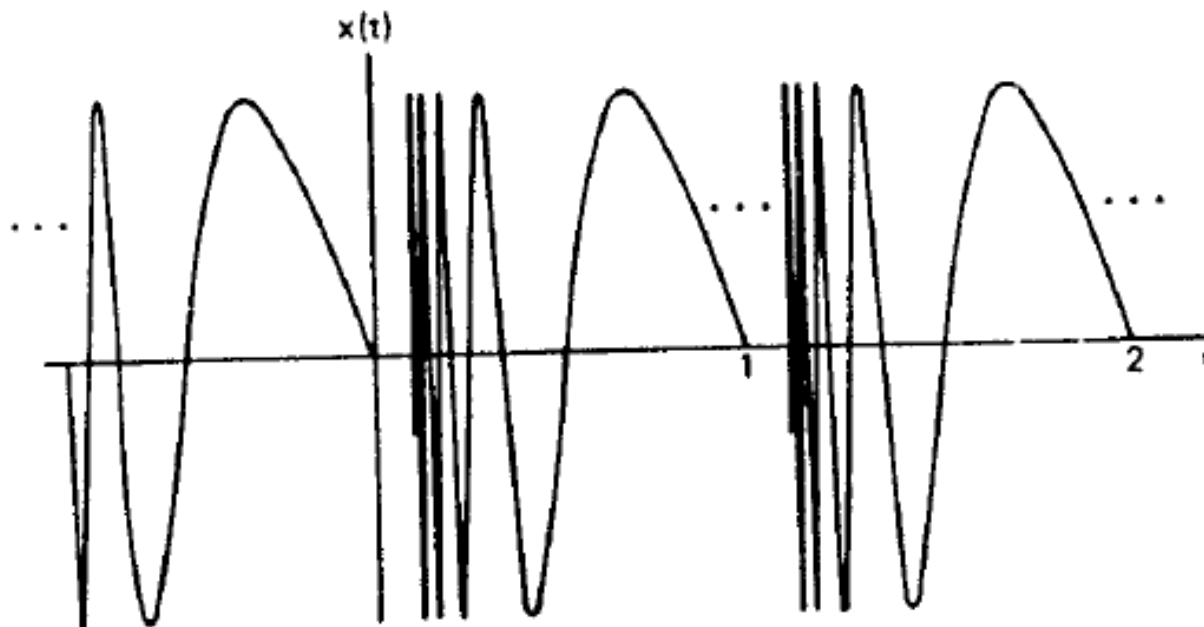


– شرط دوم: تابع $x(t)$ در یک بازه زمانی محدود تغییرات محدود داشته باشد. به عبارت دیگر، در یک دوره تناوب تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.

Lec. 3

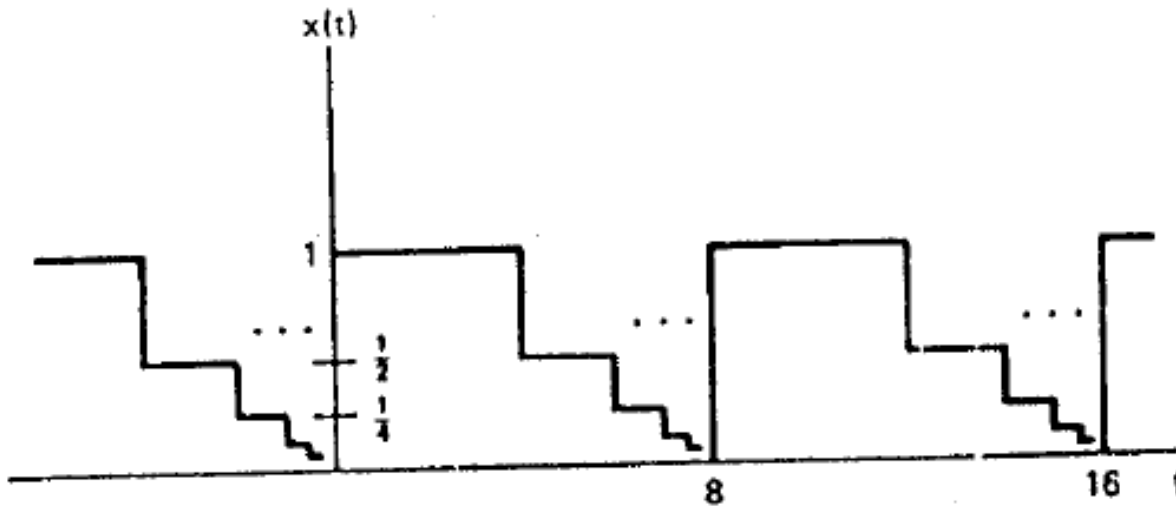
$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), \quad 0 < t \leq 1$$

$$\int_0^1 |x(t)| dt < 1$$

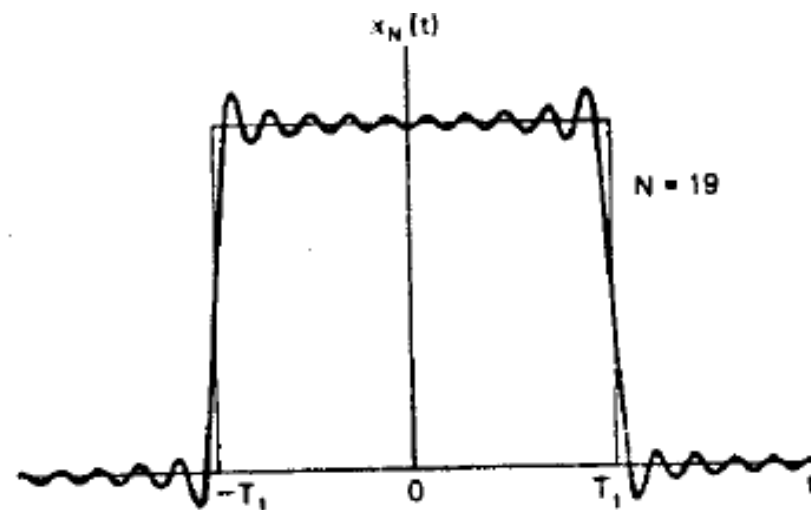
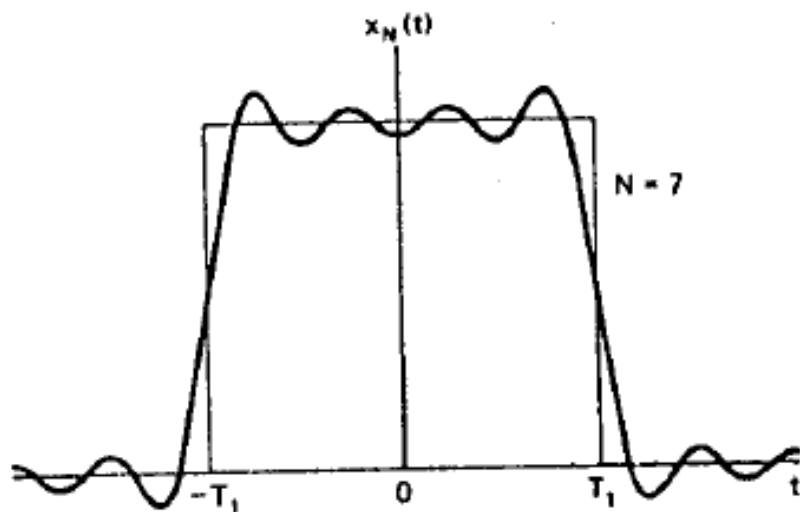
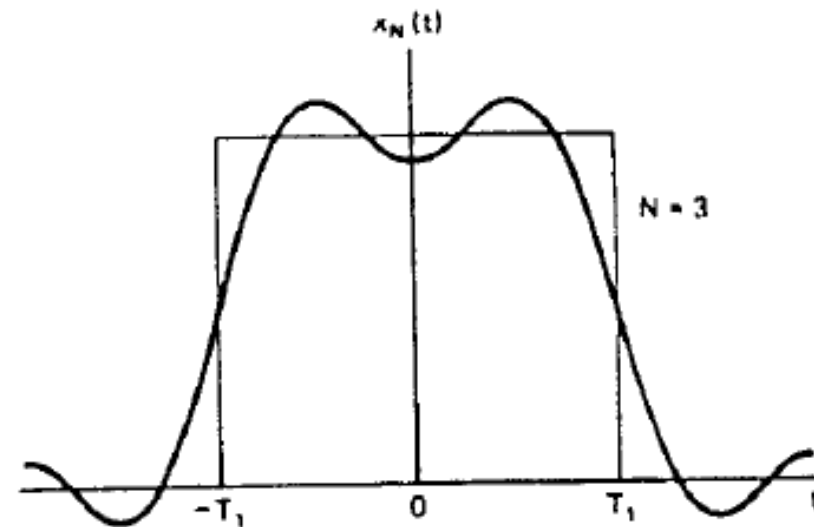
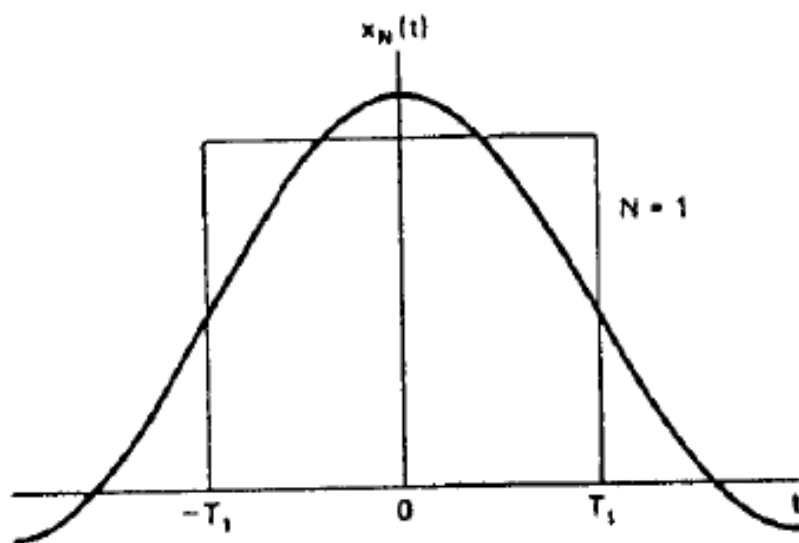


Lec. 3

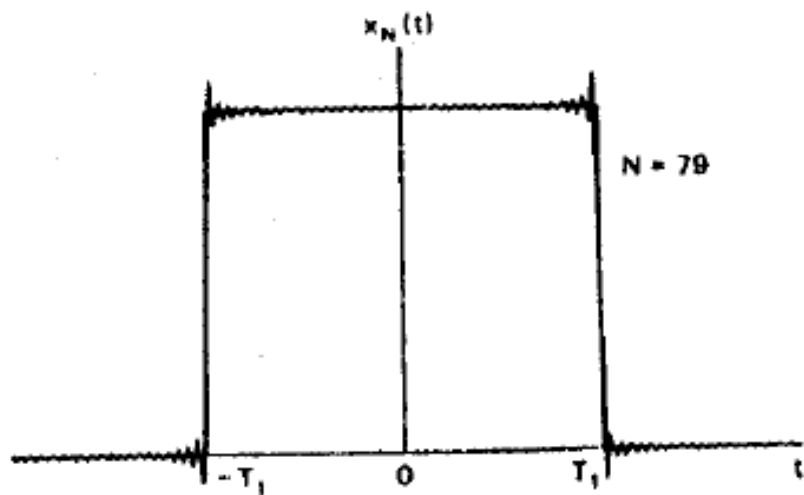
– شرط سوم: تابع $x(t)$ در یک بازه زمانی محدود تعداد محدودی ناپیوستگی داشته و این ناپیوستگی‌ها محدود باشند.



Lec. 3



Lec. 3

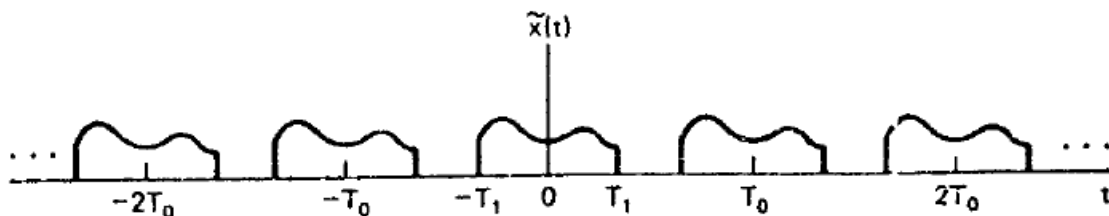
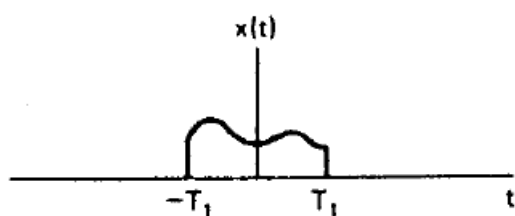


بیان سری فوریه برای سیگنال‌های نامتناوب (تبدیل فوریه)

- اولین شرط برای اینکه بتوان برای یک سیگنال نامتناوب را برحسب جملات نمایی مختلط بیان کرد، این است که سیگنال در یک بازه محدود تعریف شده باشد. به عبارت دیگر، داشته باشیم،

$$x(t) = 0, \text{ for } |t| > T_1$$

- در اینصورت برای چنین سیگنالی می‌توان یک سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ ، تعریف کرد که $x(t)$ یک دوره تناوب آن باشد. دوره تناوب این تابع را T_0 ، در نظر گرفت. هرچه این دوره تناوب برگتر شود، $\tilde{x}(t)$ به $x(t)$ نزدیکتر خواهد شد.



- حال یک سری فوریه برای $\tilde{x}(t)$ در نظر گرفته و اثر افزایش T_0 را روی آن بررسی می‌کنیم.

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- با توجه به اینکه برای محدوده $|t| < T_0/2$ داریم $\tilde{x}(t) = x(t)$ و در خارج از این محدوده $x(t)$ صفر است، می‌توان نوشت:

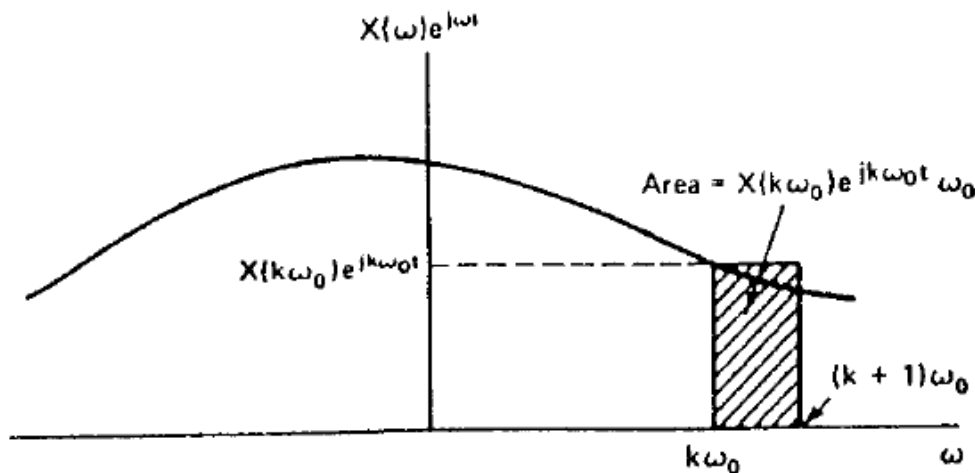
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

• حال $X(\omega)$ را به شکل زیر تعریف می کنیم،

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad a_k = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

if $T_0 \rightarrow \infty \Rightarrow \omega_0 \rightarrow 0$



$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Fourier Transform

بررسی همگرایی تبدیل فوریه

- هرچند روابط بیان برای سیگنال‌هایی که در یک بازه محدود تعریف شده‌اند استخراج گردید ولی می‌توان گفت که این روابط برای طیف وسیعی از سیگنال‌ها که برای یک بازه نامحدود تعریف شده‌اند نیز کاربرد دارد.
- در اینجا نیز باید مانند آنچه در همگرایی سری فوریه بیان گردید، یکسری شرایط برای همگرایی تبدیل فوریه در نظر گرفته شود.
- آنچه که مدنظر می‌باشد این است که تحت چه شرایطی رابطه زیر معتبر است:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- اگر مربع $x(t)$ انتگرال پذیر باشد می توان تضمین کرد که $X(\omega)$ مقدار محدودی دارد. در چنین وضعیتی می توان نشان داد که اختلاف بین $x(t)$ و $\tilde{x}(t)$ هیچ انرژی ندارد، به عبارت دیگر داریم،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{x}(t) - x(t)|^2 dt = 0$$
- ولی با این وجود ممکن است $x(t)$ و $\tilde{x}(t)$ در یکسری نقاط مجزا از t تفاوت قابل ملاحظه ای داشته باشند.
- بنابراین در اینجا نیز برای اطمینان از همگرا شدن $\tilde{x}(t)$ به $x(t)$ نیازمند یکسری شرایط هستیم.

• شرایط:

– سیگنال $x(t)$ باید بطور مطلق انتگرال پذیر باشد به این معنی که،

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

– سیگنال $x(t)$ باید تعداد محدودی ماکزیمم و مینیمم در یک بازه محدود داشته باشد.

– سیگنال $x(t)$ باید تعداد محدودی ناپیوستگی در یک بازه محدود داشته باشد و این ناپیوستگی‌ها محدود باشند.

• بنابراین سیگنالی که به صورت مطلق انتگرال پذیر بوده و پیوسته بوده و یا چند ناپیوستگی محدود داشته باشد دارای تبدیل فوری خواهد بود.

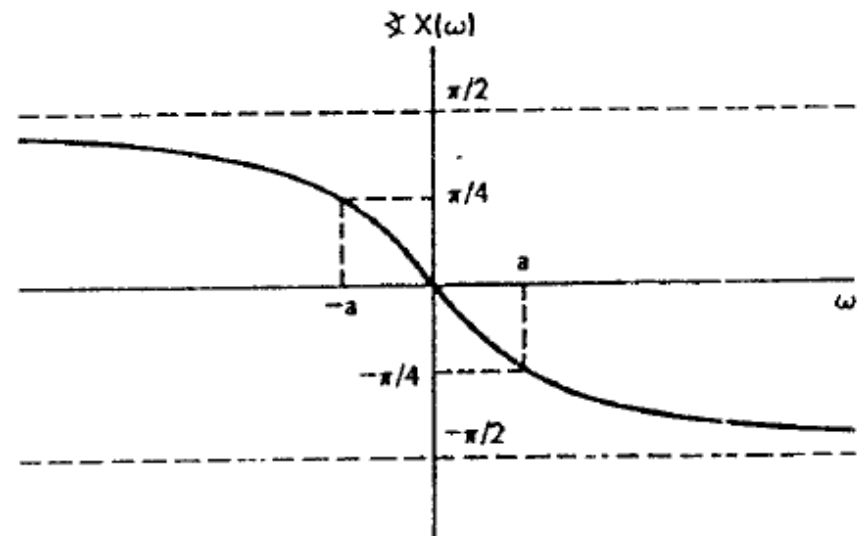
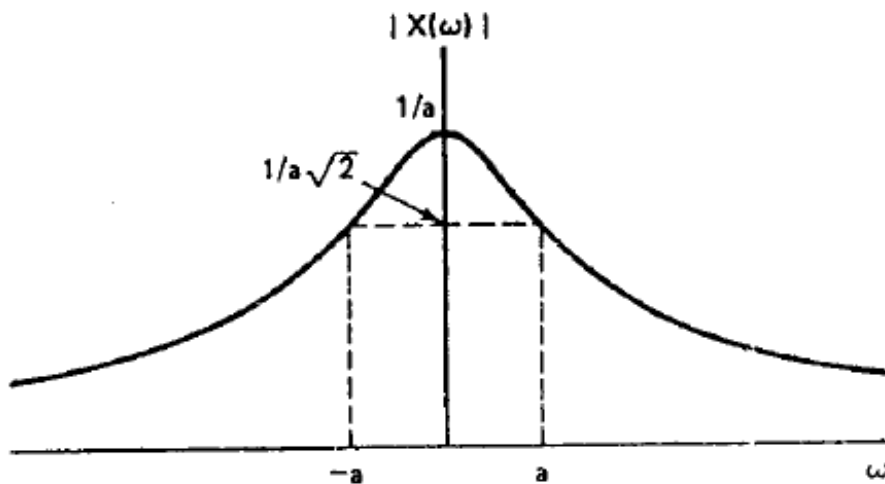
Lec. 3

$$x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

• مثال:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{-1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \quad \angle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

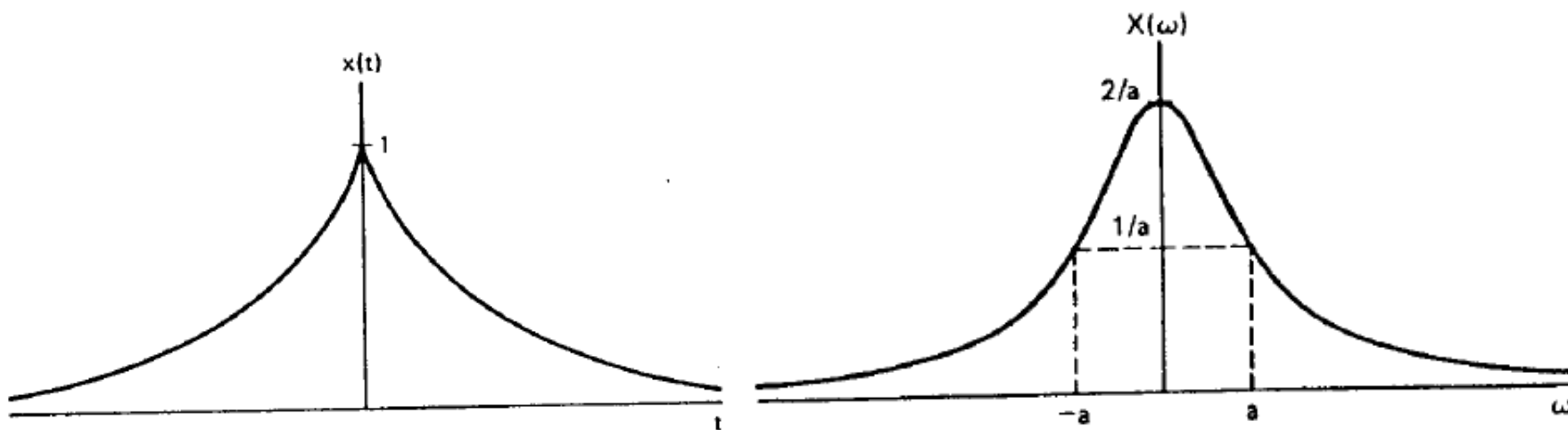


Lec. 3

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

• مثال:

$$X(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$



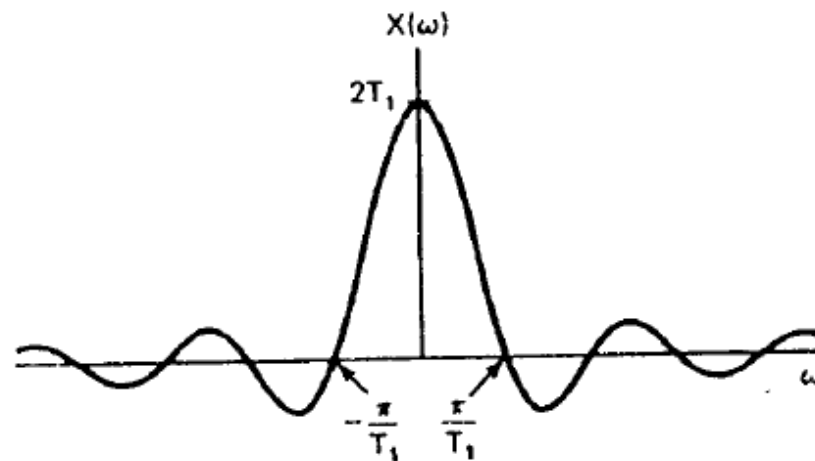
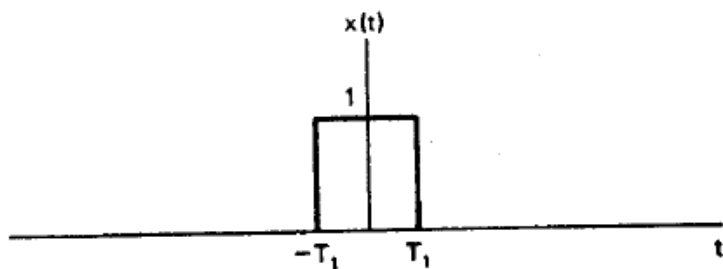
Lec. 3

$$x(t) = \delta(t) \quad X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$

• مثال:

• مثال:

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad X(\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} 1 e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1)$$

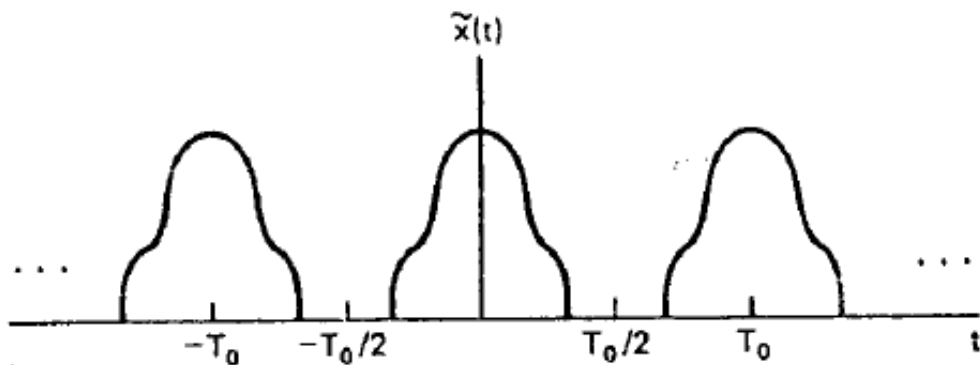


ضرایب سری فوریه به عنوان نمونه‌هایی از تبدیل فوریه یک پریود از یک سیگنال متناوب

- ضرایب سری فوریه را می‌توان به عنوان نمونه‌هایی از تبدیل فوریه یک پریود از یک سیگنال متناوب در نظر گرفت.
- $x(t)$ را یک پریود از سیگنال متناوب $\tilde{x}(t)$ در نظر بگیرید،

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}(t), & -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0, & -T_0/2 < t \text{ or } t > T_0/2 \end{cases}$$

می‌توان ضرایب a_k برای تابع متناوب $\tilde{x}(t)$ را به صورت نمونه‌هایی از تبدیل فوریه تابع $x(t)$ توصیف کرد.

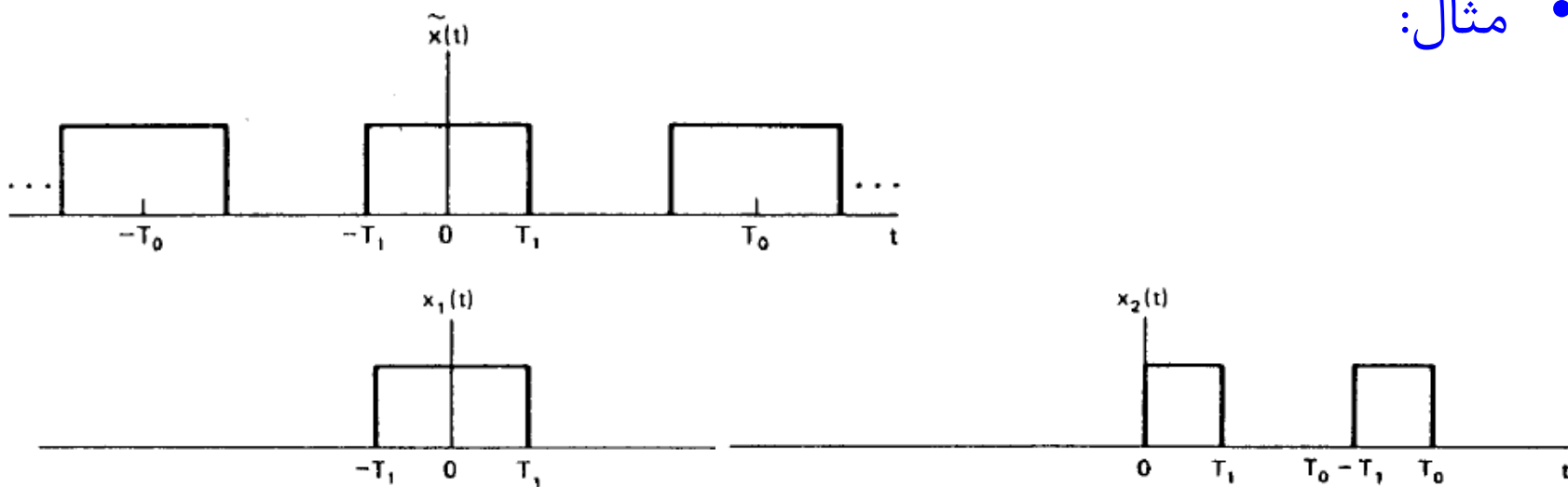


Lec. 3

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)$$

• مثال:



Lec. 3

$$X_1(\omega) = \frac{2 \sin(\omega T_1)}{\omega}$$

$$\begin{aligned} X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{T_1} e^{-j\omega t} dt + \int_{T_0-T_1}^{T_0} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} [1 - e^{-j\omega T_1}] + \frac{1}{j\omega} [e^{-j\omega(T_0-T_1)} - e^{-j\omega T_0}] \\ &= \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{\omega T_1}{2}\right) [e^{-j\omega T_1/2} + e^{-j\omega(T_0-T_1)/2}] \end{aligned}$$

$$\text{if } \omega = k\omega_0, \quad X_2(\omega) = \frac{2}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) [e^{-jk\omega_0 T_1/2} + e^{-jk\omega_0(T_0-T_1)/2}]$$

$$X_2(k\omega_0) = \frac{4}{k\omega_0} \sin\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) \cos\left(\frac{k\omega_0 T_1}{2}\right) = \frac{2}{k\omega_0} \sin(k\omega_0 T_1)$$

$$\text{for } \omega = k\omega_0 \quad X_1(K\omega_0) = X_2(K\omega_0)$$

تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب

- می‌توان نشان داد که تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب به یک قطار ضربه بر حسب فرکانس می‌باشد که مساحت این ضربه متناسب با ضرایب سری فوریه سیگنال است.
- فرض کنید یک سیگنال متناوب در اختیار داریم که تبدیل فوریه آن به شکل زیر است:

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}$$

- حال فرض کنید $X(\omega)$ به شکل یک ترکیب خطی از توابع ضربه باشد

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \Rightarrow x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

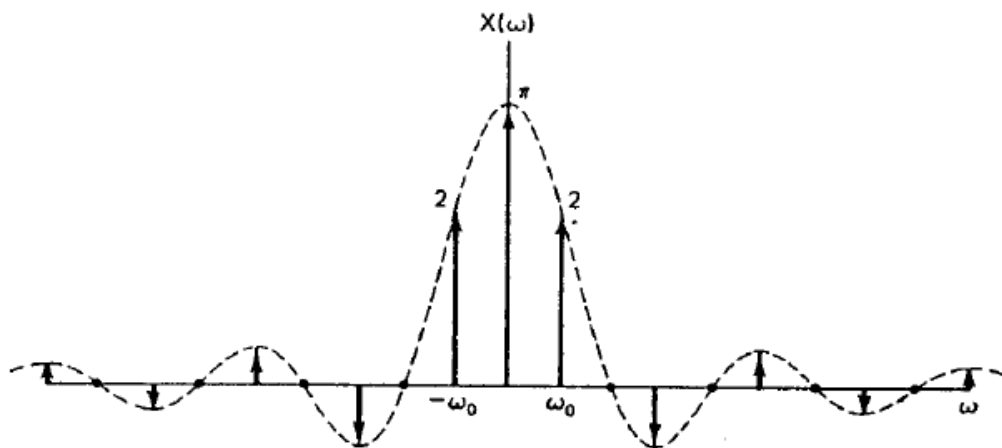
Lec. 3

- مثال قبلی را در نظر بگیرید،

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{\pi k}$$

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

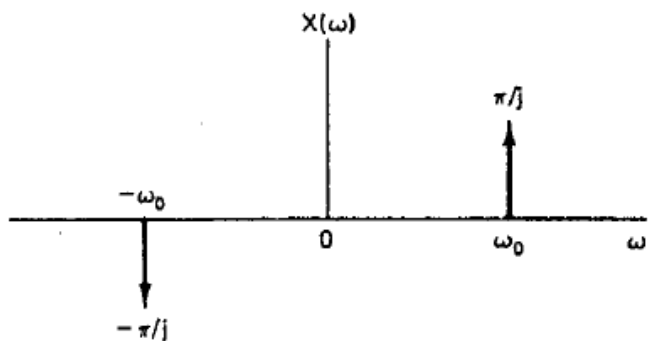
$$T_0 = 4T_1$$



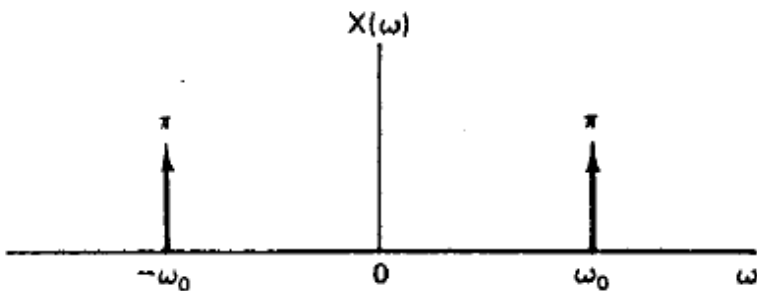
Lec. 3

• مثال:

$$x(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2j}, a_{-1} = \frac{-1}{2j}, a_k = 0 \text{ for } k \neq -1, 1$$



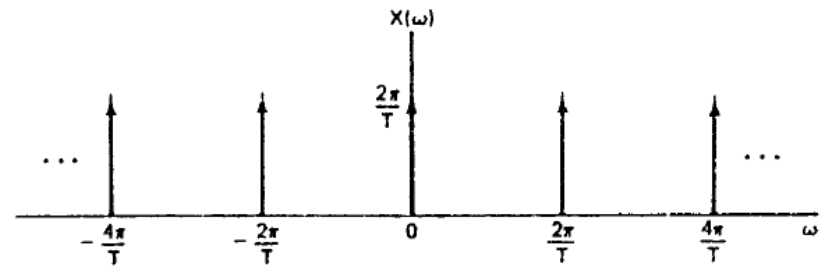
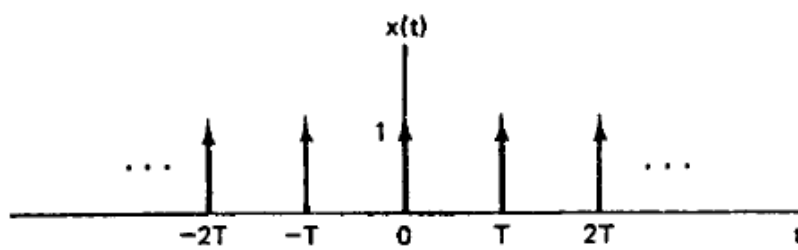
$$x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, a_{-1} = \frac{1}{2}, a_k = 0 \text{ for } k \neq -1, 1$$



Lec. 3

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

• مثال:



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

خواص تبدیل فوریه

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = F[x(t)],$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = F^{-1}[X(\omega)]$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

• خطی بودن

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) \\ x_2(t) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) \end{array} \right\} \Rightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{F} aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$

• خواص تقارنی

$$x(t) \text{ is Real} \Rightarrow X(-\omega) = X^*(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \text{Real}[X(\omega)] = \text{Real}[X^*(\omega)] \\ \text{Im}[X(\omega)] = -\text{Im}[X^*(\omega)] \end{cases}$$

- اگر تابع $x(t)$ حقیقی و زوج باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج خواهد بود

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \xrightarrow{t \rightarrow -\tau} X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau = X(\omega)$$

- اگر تابع $x(t)$ حقیقی و فرد باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن نیز موهومی و فرد خواهد بود

- همانطور که قبلاً گفتیم یک سیگنال حقیقی را می توان به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد بیان کرد،

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \text{Ev}\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} \text{Re}\{X(\omega)\} \\ \text{Od}\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} j \text{Im}\{X(\omega)\} \end{cases}$$

- انتقال زمانی:

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega t_0} X(\omega) = |X(\omega)| e^{j(\theta_\omega - \omega t_0)}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi x(0) \delta(\omega)$$

• مشتق و انتگرال:

• مقیاس بندی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) \Rightarrow x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

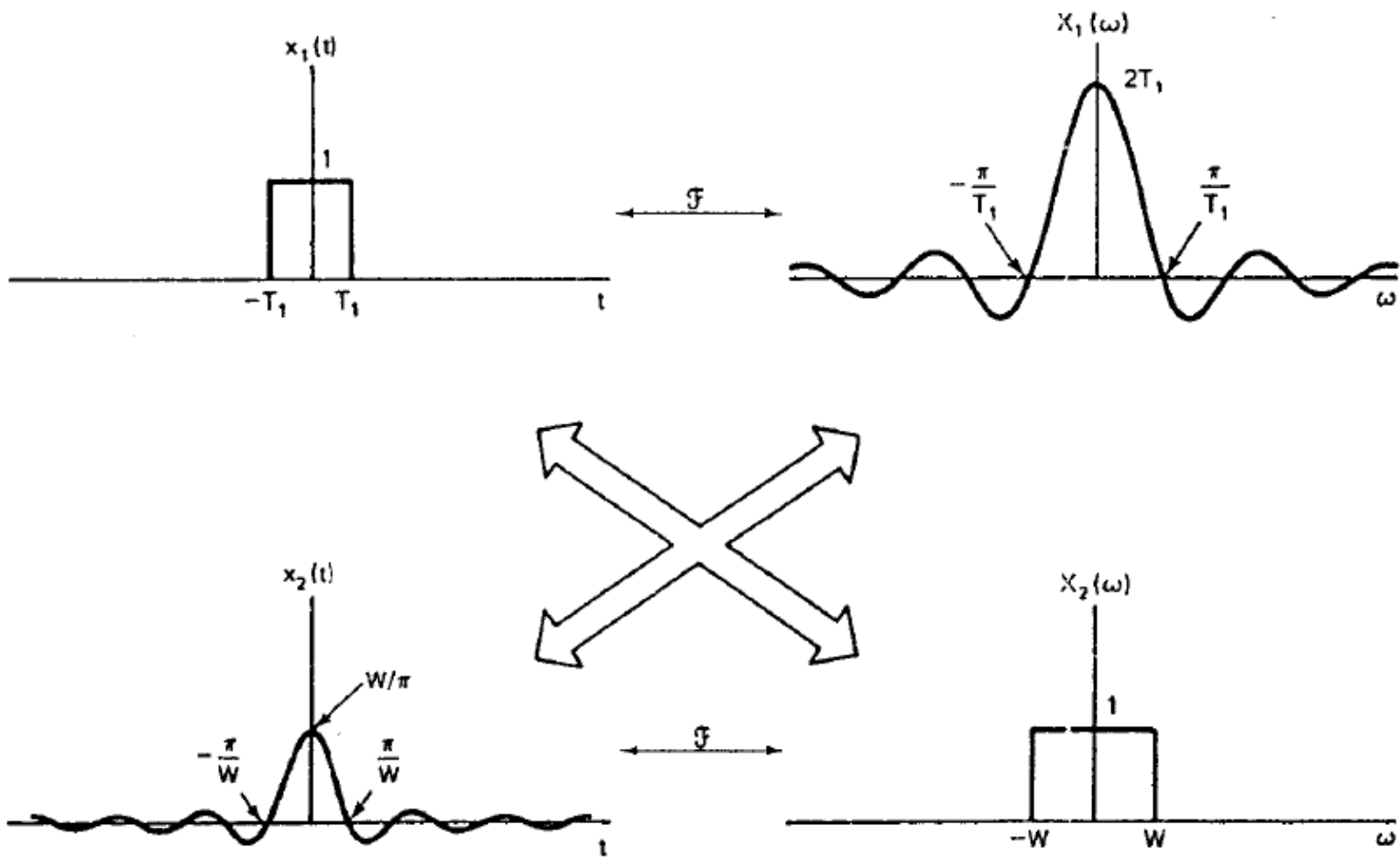
• دوگان:

– با نگاهی به تعریف تبدیل فوری و استخراج تبدیل فوری از سیگنال زمانی و عکس تبدیل فوری از تبدیل فوری متوجه یک تقارن بین این دو رابطه خواهیم شد

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T_1)$$

$$x_2(t) = \frac{1}{\pi t} \sin(Wt) \xleftrightarrow{F} X_2(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$

Lec. 3



Lec. 3

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

$$e^{j\omega_0 t} x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega - \omega_0)$$

$$-\frac{1}{jt} x(t) + \pi x(0)\delta(t) \xleftrightarrow{F} \int_{-\infty}^{\omega} X(\eta) d\eta$$

• رابطه پارسوال:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(\omega)X(\omega)d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

• این رابطه، بیانگر انرژی یک سیگنال می باشد.

- برای سیگنال‌های متناوب، انرژی یک سیگنال روی یک دوره تناوب به شکل زیر تعریف می‌گردد.

$$\int_{T_0} |x(t)|^2 = T_0 \sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2$$

- خاصیت کانولوشن:

– یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر بگیرید،

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(\omega) = F[y(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} H(\omega) d\tau = H(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= X(\omega)H(\omega)$$

Lec. 3

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

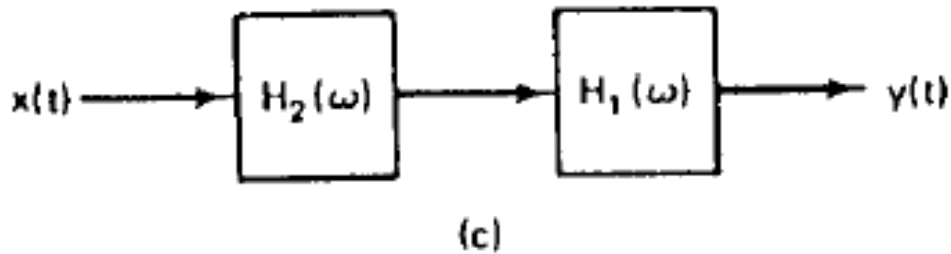
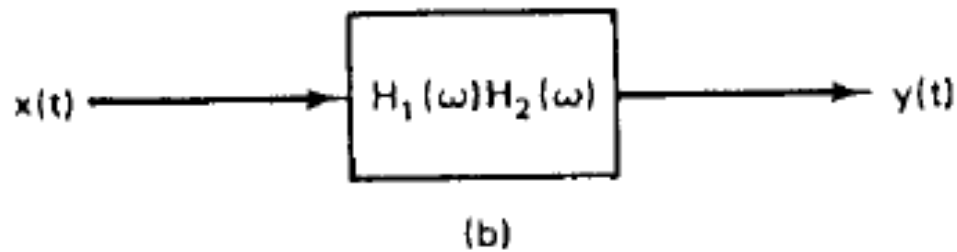
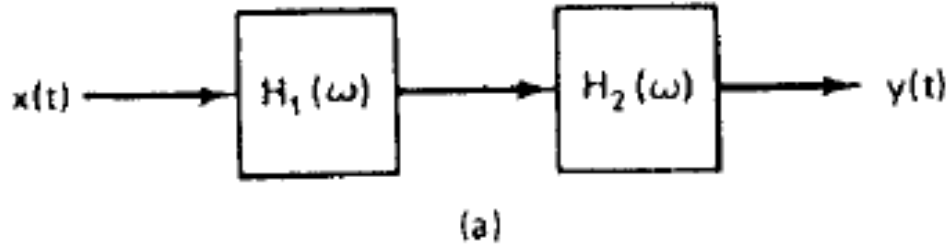
$$e^{jk\omega_0 t} \xrightarrow{\text{LTI}} H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \quad H(k\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-jk\omega_0 \tau} d\tau$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \xrightarrow{\text{LTI}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

$$y(t) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad Y(\omega) = \underbrace{H(\omega)}_{\text{Frequency Response}} X(\omega)$$

Lec. 3



پاسخ فرکانسی را برای هر سیستم LTI نمی‌توان تعریف کرد. سیستم باید پایدار باشد.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$$

$$h(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

• مثال:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = e^{-j\omega t_0}X(\omega) \quad y(t) = x(t - t_0)$$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow Y(\omega) = j\omega X(\omega) \quad H(\omega) = j\omega$$

• مثال:

• مثال:

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0 \quad y(t) = ?$$

$$H(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \quad X(\omega) = \frac{1}{b + j\omega} \quad Y(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \times \frac{1}{b + j\omega}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} \times \frac{1}{b + j\omega} = \frac{1}{b - a} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{b + j\omega} \right], \quad b \neq a$$

$$y(t) = \frac{1}{b - a} \left[e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t) \right]$$

Lec. 3

$$\text{if } a = b \quad Y(\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$$

$$Y(\omega) = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{(a + j\omega)} \right] \Rightarrow y(t) = te^{-at}u(t)$$

• مثال:

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$x(t) = \sum_{k=-3}^3 a_k e^{jk2\pi t}$$

$$y(t) = ?$$

Lec. 3

بررسی پاسخ فرکانسی و بیان نمودار بود (مطالعه آزاد)

