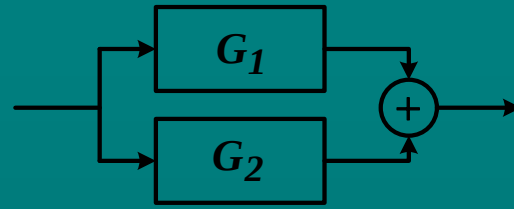
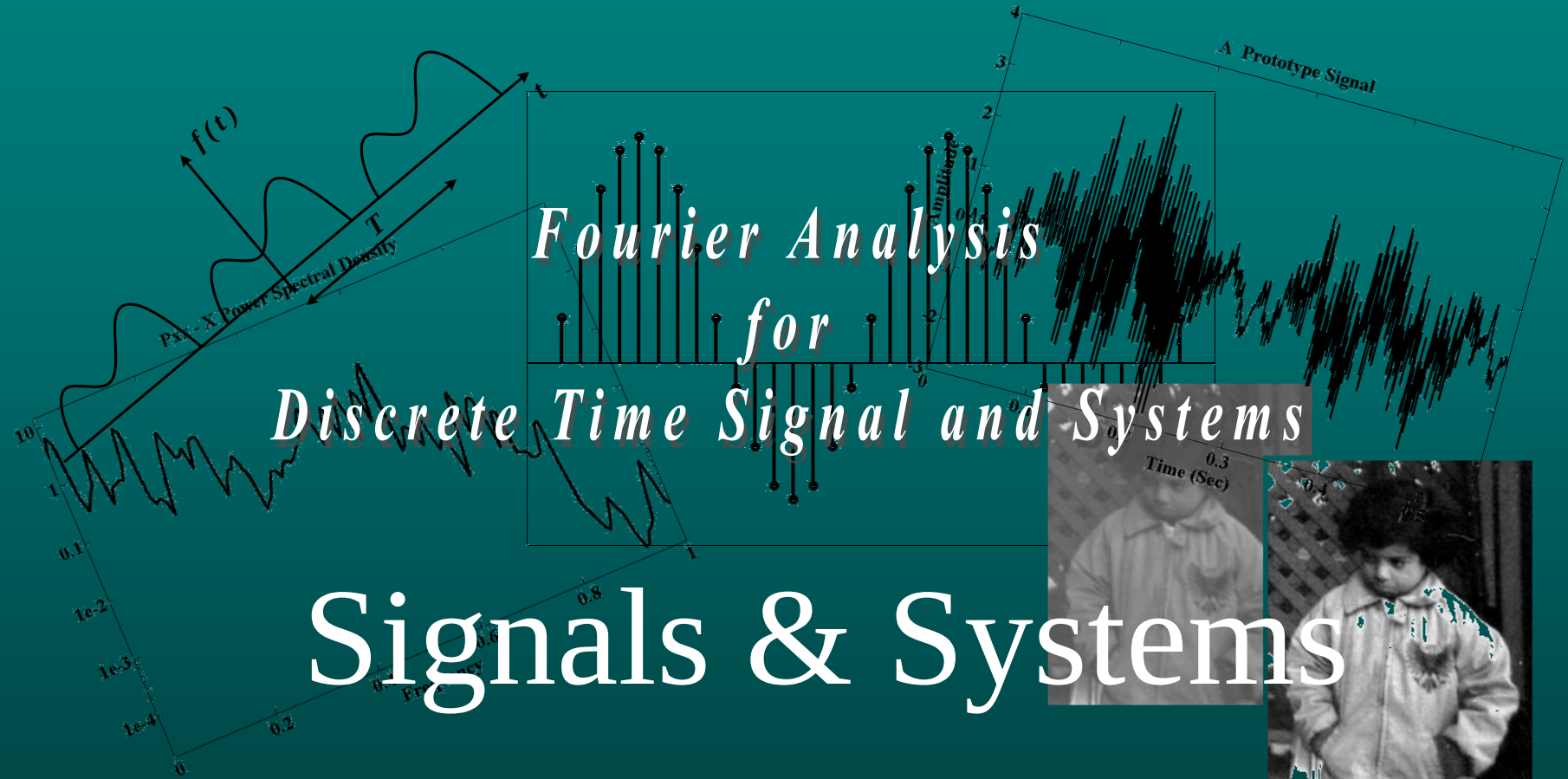


University
of Tehran



Faculty of
Engineering



Signals & Systems

Lecture 4

- آنالیز تبدیل فوریه گسسته شباهت زیادی به آنالیز تبدیل فوریه پیوسته دارد. ولی با این وجود می‌توان تفاوت‌های آشکاری بین این دو نوع تبدیل فوریه مشاهده کرد.
- تبدیل فوریه گسسته، ابزاری برای پایه‌گذاری FFT می‌باشد.

• پاسخ سیستم‌های LTI گسسته به ورودی نمایی مختلط

– همانند آنچه در مورد سیستم‌های LTI پیوسته گفته شد، برای سیستم‌های LTI گسسته نیز جملات نمایی مختلط، توابع ویژه محسوب می‌شوند.

– یک سیستم گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$ و ورودی $x[n]$ در نظر بگیرید. پاسخ سیستم به این ورودی به شکل زیر خواهد بود.

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}$$

$$y[n] = H(z)z^n$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \quad \text{مقدار ویژه}$$

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \xrightarrow{\text{LTI}} y[n] = \sum_k H(z_k) z_k^n$$

• مثال:

• در ادامه متغیر مختلط z را به شکل خاص زیر در نظر خواهیم گرفت.

$$e^{j\Omega n} \Rightarrow |z| = 1$$

نمایش سیگنال‌های متناوب: سری فوریه گسسته

- فرض کنید $x[n]$ یک تابع متناوب با دوره تناوب N باشد،

$$x[n + N] = x[n]$$

- همانطور که در مورد این سیگنال دیدیم، کوچکترین N مثبت که معادله بالا را برآورده سازد (N_0)، دوره تناوب اصلی نامیده می‌شود
- حال تابع $e^{j(2\pi/N)n}$ را در نظر بگیرید یک تابع متناوب با دوره تناوب اصلی N می‌باشد. در صورت توابع هارمونیکی زیر نیز متناوب با دوره تناوب N خواهند بود.

$$\phi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
- تفاوت اساسی در مورد سیگنال‌های هارمونیکی در حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته در این است که تمام سیگنال‌های هارمونیکی زمان پیوسته مجزا هستند ولی برای در مورد سیگنال‌های هارمونیکی زمان گسسته فقط N تعداد مجزا وجود دارد

• دلیل این امر این است که:
$$e^{j(\Omega+2\pi r)n} = e^{j\Omega n} e^{2\pi r n} = e^{j\Omega n}$$

• می توان نوشت:

$$\phi_0[n] = \phi_N[n], \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n] \quad \phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n], \phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$$

• ترکیب خطی این توابع نیز تابعی متناوب با دوره تناوب N خواهد بود.

• با توجه به آنچه گفته شد، ترکیب خطی این توابع حداکثر روی یک محدود

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \quad N \text{ تایی در نظر گرفته می شود.}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad k = 3, 4, 5, \dots, N+2$$

• رابطه بالا، سری فوریه گسسته نامیده شده و همانطور که ملاحظه می کنید دارای تعداد جملات محدودی است.

• a_k ، ضرایب سری فوریه نامیده می شوند.

نمایش سری فوریه سیگنال‌های متناوب

- در اینجا به دنبال بیان رابطه یا فرمولی برای محاسبه ضرایب سری فوریه گسسته هستیم. با توجه به رابطه داده شده می‌توان نوشت:

$$x[0] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)} \quad \dots \quad x[N-1] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j2\pi k(N-1/N)}$$

$$x[N] = x[0]$$

- می‌توان به کمک دستگاه N معادله N مجهول ضرایب سری فوریه را محاسبه کرد. ولی راه‌حل بازگشتی برای محاسبه این ضرایب نیز وجود دارد. برای محاسبه ضرایب به روش بازگشتی لازم است رابطه زیر را بدانیم.

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\alpha = e^{jk(2\pi/N)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n \quad \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \begin{cases} N, & \alpha = 1 \\ \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

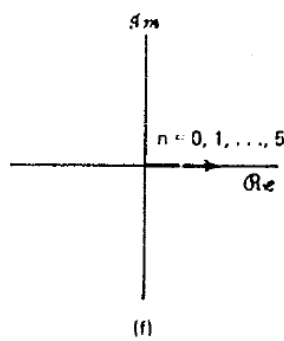
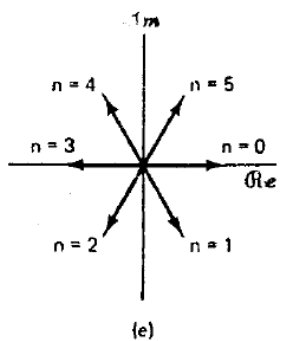
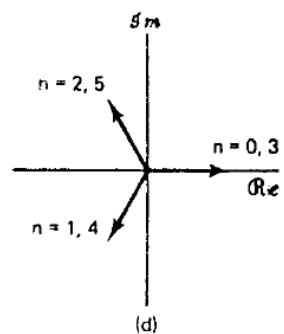
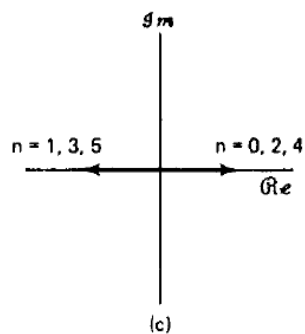
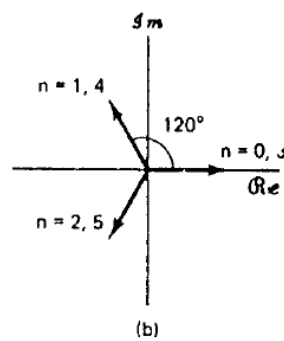
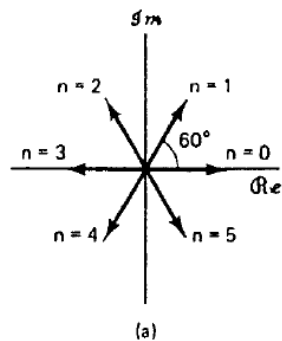
$$e^{jk(2\pi/N)} = 1 \text{ if } k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ \frac{1 - e^{jk(2\pi/N)N}}{1 - e^{jk(2\pi/N)}} = 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Lec. 4

$N = 6$

• مثال:



Lec. 4

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\
 \xrightarrow{\times e^{-jr(2\pi/N)n}} & x[n] \times e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \times e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \times e^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n}$$

$$\sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = r \\ 0, & k \neq r \end{cases} \quad a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] \times e^{-jr(2\pi/N)n}$$

- بنابراین سری فوریه به همراه ضرایب آن را می توان به شکل زیر جمع بندی کرد:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \times e^{-jk(2\pi/N)n}$$

- ضرایب a_k ، ضرایب طیفی $x[n]$ نیز نامیده می شود.

$$x[n] = a_0\phi_0[n] + a_1\phi_1[n] + \dots + a_{N-1}\phi_{N-1}[n]$$

$$x[n] = a_1\phi_1[n] + a_2\phi_2[n] + \dots + a_N\phi_N[n]$$

$$a_0 = a_N \Rightarrow a_k = a_{k+N}$$

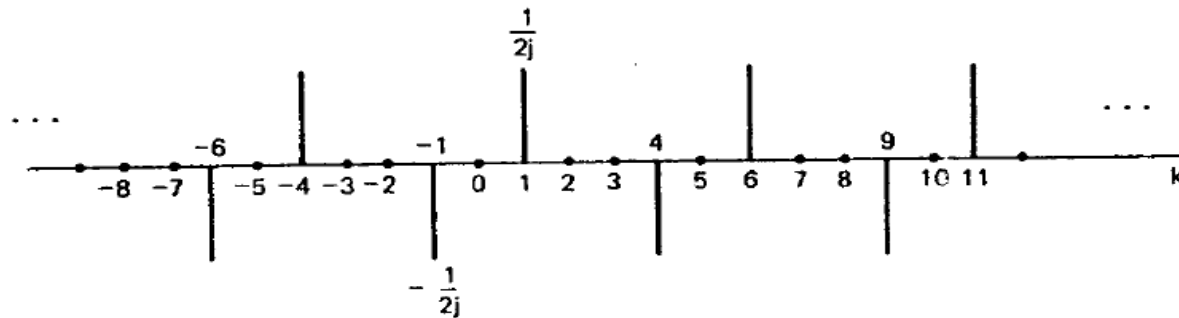
$$x[n] = \sin \Omega_0 n$$

- مثال:
- اگر $\frac{2\pi}{\Omega_0}$ یک عدد صحیح یا نسبتی از دو عدد صحیح باشد، تابع داده شده پریودیک خواهد بود.

$$\text{if } \frac{2\pi}{\Omega_0} = N \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \quad N = \text{دوره تناوب}$$

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-j(2\pi/N)n} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j} \\ a_{-1} = -\frac{1}{2j} \end{cases}$$

$$\text{if } N = 5$$



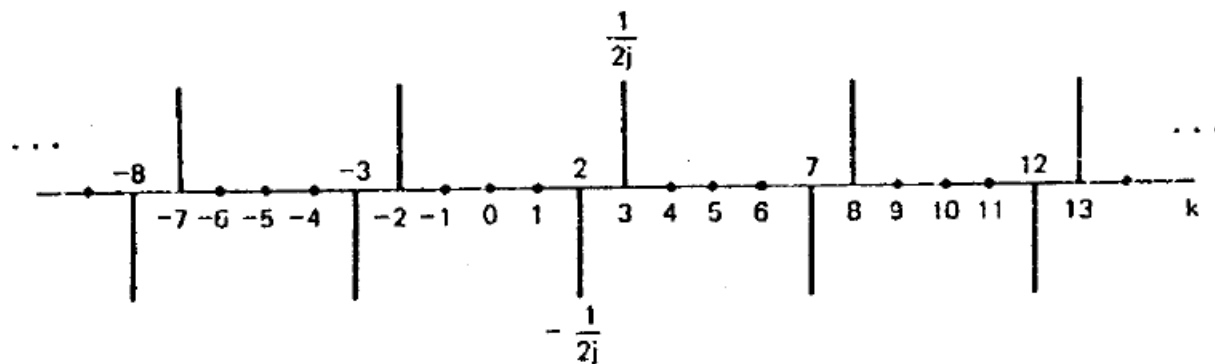
Lec. 4

$$\text{if } \frac{2\pi}{\Omega_0} = \frac{N}{m} \Rightarrow \Omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$$

- اگر m و N هیچ فاکتور مشترکی نداشته باشند، در اینصورت دوره تناوب تابع همان N خواهد بود.

$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{jm(2\pi/N)n} - \frac{1}{2j} e^{-jm(2\pi/N)n} \Rightarrow \begin{cases} a_m = \frac{1}{2j} \\ a_{-m} = -\frac{1}{2j} \end{cases}$$

$$\text{if } N = 5, m = 3$$



• مثال:

$$x[n] = 1 + \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + 3\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{N}n + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j} [e^{j(2\pi/N)n} - e^{-j(2\pi/N)n}]$$

$$+ \frac{3}{2} [e^{j(2\pi/N)n} + e^{-j(2\pi/N)n}]$$

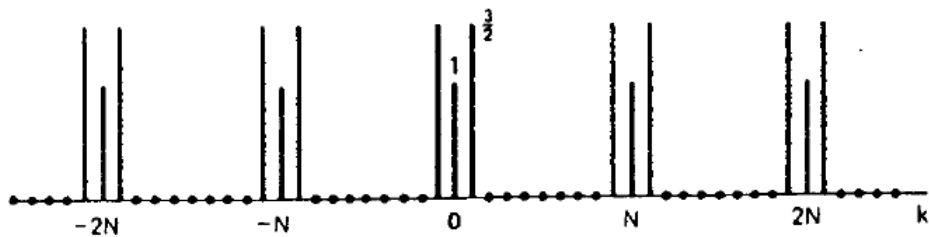
$$+ \frac{1}{2} [e^{j(4\pi n/N + \pi/2)} + e^{-j(4\pi n/N + \pi/2)}]$$

$$x[n] = 1 + \left(\frac{1}{2j} + \frac{3}{2}\right)e^{j(2\pi/N)n} + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2j}\right)e^{-j(2\pi/N)n} + \frac{j}{2}e^{j(4\pi/N)n} - \frac{j}{2}e^{-j(4\pi/N)n}$$

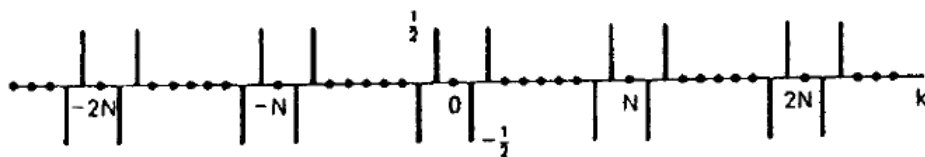
$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{2j} + \frac{3}{2}, \quad a_{-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2j}, \quad a_2 = \frac{j}{2}, \quad a_{-2} = -\frac{j}{2}$$

Lec. 4

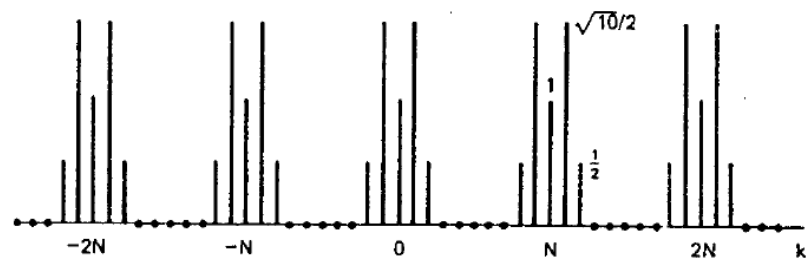
$\text{Re}\{a_k\}$



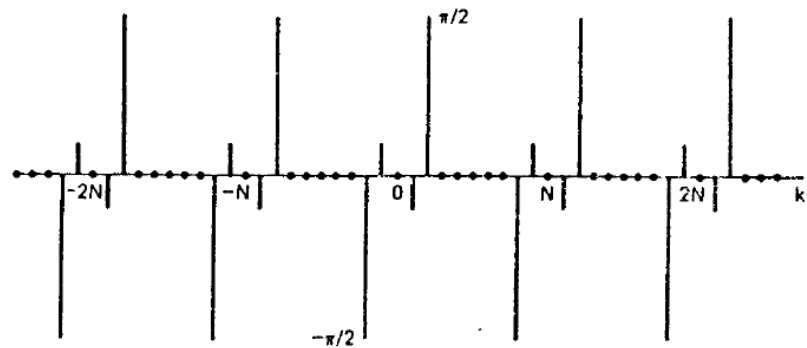
$\text{Im}\{a_k\}$



$|a_k|$



$\angle a_k$



- در مورد سری فوریه گسسته نیز مانند سری فوریه پیوسته، اگر سیگنال حقیقی باشد، خواهیم داشت:

$$a_k^* = a_{-k}$$
- همچنین اگر سیگنال حقیقی و زوج باشد، سری فوریه گسسته آن نیز حقیقی و زوج خواهد بود. (?)
- اگر سیگنال حقیقی و فرد باشد، سری فوریه گسسته آن نیز موهومی خالص و فرد خواهد بود. (?)

• مثال: ضرایب سری فوریه شکل زیر را محاسبه نمایید.



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$m = n + N_1$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)(m-N_1)} = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk(2\pi/N)m}$$

$$a_k = \frac{1}{N} e^{jk(2\pi/N)N_1} \frac{1 - e^{-jk2\pi(2N_1+1)/N}}{1 - e^{-jk2\pi/N}}$$

Lec. 4

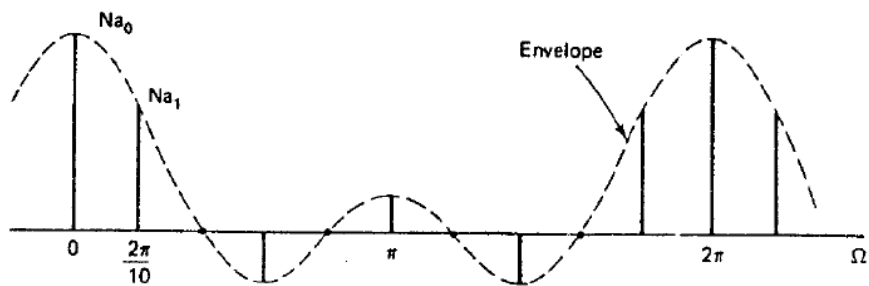
$$a_k = \frac{1}{N} \frac{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi(N_1+1/2)/N} - e^{-jk2\pi(N_1+1/2)/N}]}{e^{-jk(2\pi/2N)} [e^{jk2\pi/2N} - e^{-jk2\pi/2N}]}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin[2\pi k(N_1 + 1/2)/N]}{\sin(2k\pi/2N)}, \quad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

$$a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$$

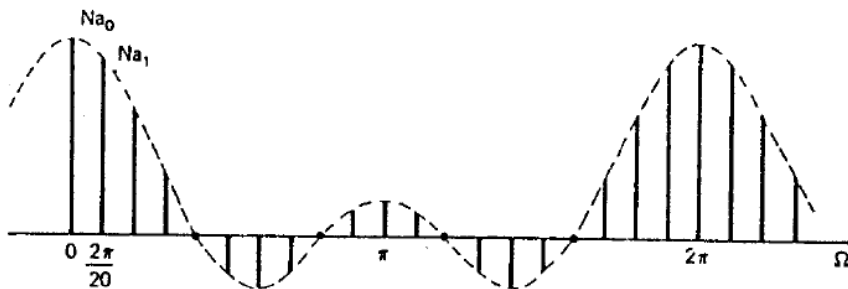
$$Na_k = \left. \frac{\sin[(2N_1 + 1)\Omega/2]}{\sin(\Omega/2)} \right|_{\Omega=2k\pi/N}$$

Lec. 4

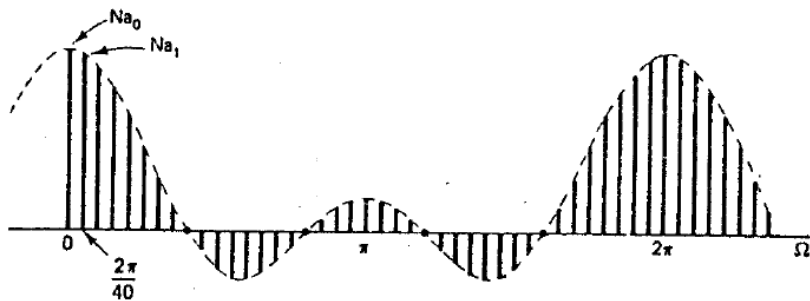


$$2N_1 + 1 = 5$$

$$N = 10$$



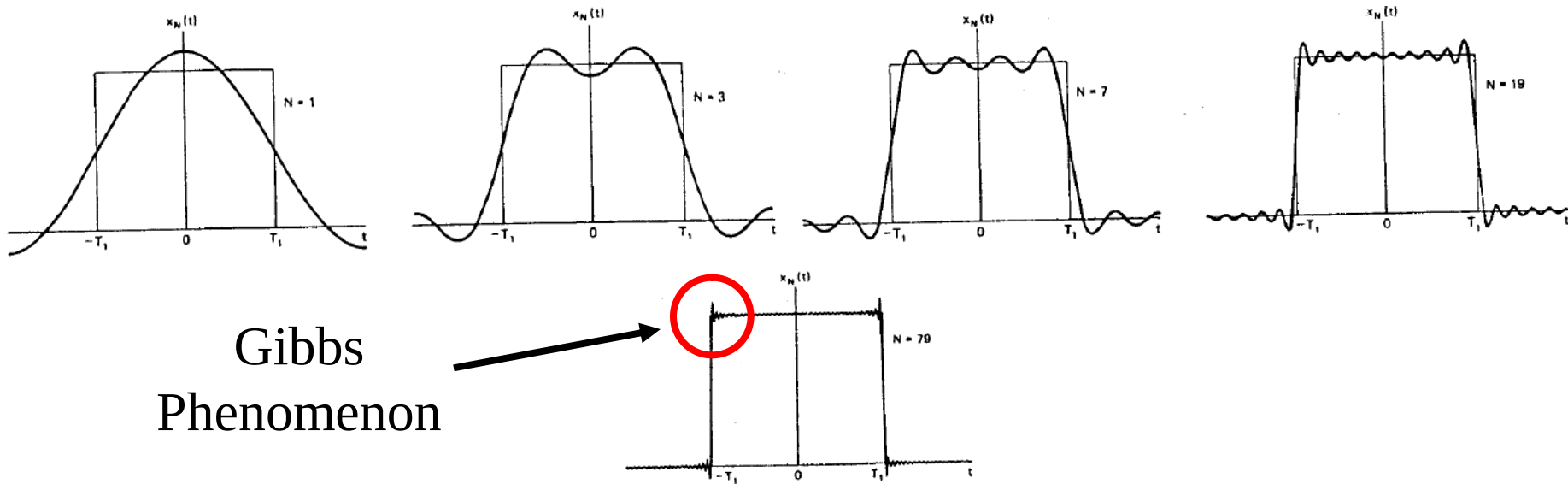
$$N = 20$$



$$N = 40$$

Lec. 4

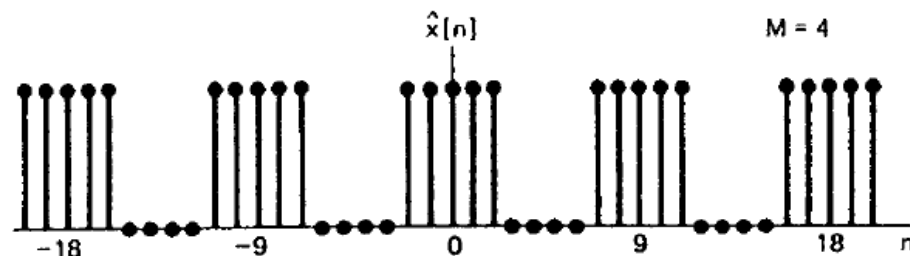
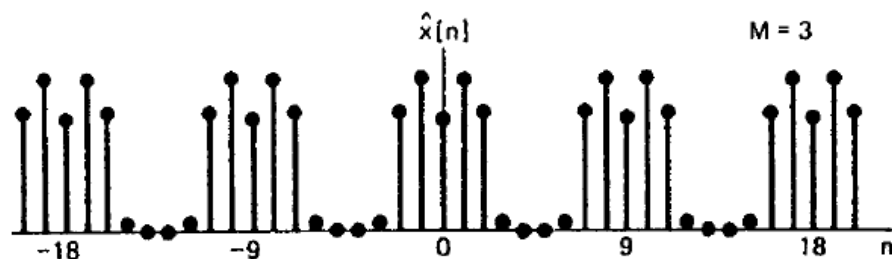
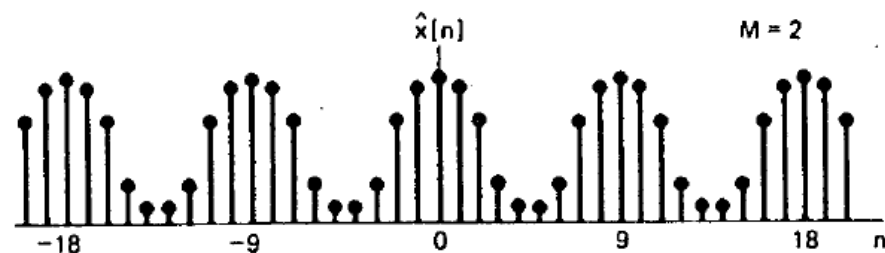
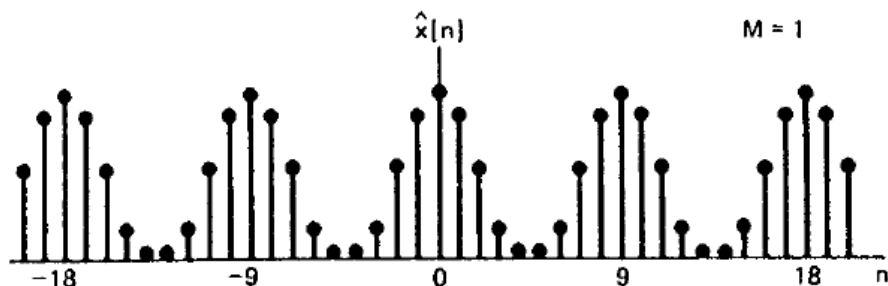
- در ادامه به بحث همگرایی سری فوریه به مقدار واقعی سیگنال می پردازیم. همانطور که دیدیم در سیگنال های پیوسته برای همگرایی دقیق سری فوریه به مقدار واقعی سیگنال باید تعداد ضرایب سری فوریه را به بینهایت میل دهیم.



Lec. 4

- ولی در مورد سیگنال گسسته نمایش داده شده با سری فوریه گسسته چنین نمی‌باشد. زیرا همانطور که دیدیم برای نمایش یک سیگنال گسسته متناوب توسط یک سری فوریه گسسته به تعدادی محدود جمله نیازمند خواهیم بود.

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$



- بر خلاف سیگنال‌های پیوسته، در مورد سیگنال‌های گسسته از پدیده گیبس خبری نخواهد بود. به عبارت دیگر اگر دوره تناوب سیگنال فرد باشد، با انتخاب $M = \frac{N-1}{2}$ سری فوریه گسسته، تقریب دقیقی از سیگنال خواهد بود و اگر دوره تناوب زوج باشد، با انتخاب $M = \frac{N}{2}$ و در نظر گرفتن رابطه زیر تقریب دقیقی از سیگنال خواهیم داشت.

$$M = \frac{N-1}{2}, \quad \hat{x}[n] = \sum_{k=-M}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n} = x[n] \quad \text{سیگنال فرد}$$

$$M = \frac{N}{2}, \quad \hat{x}[n] = \sum_{k=-M+1}^M a_k e^{jk(2\pi/N)n} = x[n] \quad \text{سیگنال زوج}$$

- شباهت سری فوریه گسسته و پیوسته در این است که برای هر دو، توابع نمایی مختلط توابع ویژه هستند و لذا پاسخ یک سیستم LTI به این سری ها به صورت دنباله ای از نمایی های مختلط خواهد بود.

$$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \xrightarrow[h[n]]{\text{LTI}} y[n] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

• مثال:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$$

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad -1 < \alpha < 1$$

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

$$H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-jk(2\pi/N)n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha e^{-jk(2\pi/N)} \right)^n = \frac{1}{1 - \alpha e^{-jk(2\pi/N)}}$$

$$y[n] = \frac{1}{2} H\left(\frac{2\pi}{N}\right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H\left(-\frac{2\pi}{N}\right) e^{-j(2\pi/N)n}$$

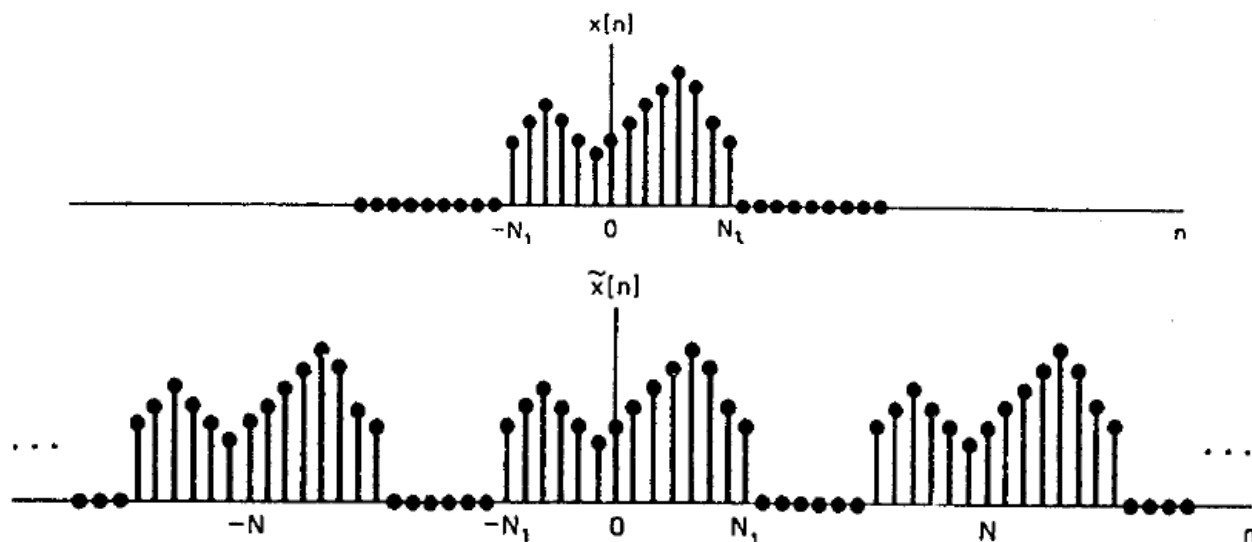
Lec. 4

$$\frac{1}{1 - \alpha e^{-jk(2\pi/N)}} = re^{j\theta} \Rightarrow y[n] = r \cos\left(\frac{2\pi}{N}n + \theta\right)$$

$$\text{if } N = 4, \frac{1}{1 - \alpha e^{-j(2\pi/4)}} = \frac{1}{1 + j\alpha} \Rightarrow y[n] = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^2}} \cos\left(\frac{n\pi}{2} - \tan^{-1}\alpha\right)$$

نمایش سیگنال‌های غیرمتناوب: تبدیل فوریه زمان گسسته

- سیگنال نامتناوب $x[n]$ را که در یک بازه محدود تعریف شده است در نظر بگیرید. می‌توان به این سیگنال یک سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ نسبت داد که سیگنال $x[n]$ یک دوره تناوب آن باشد.
- هرچه دوره تناوب سیگنال $\tilde{x}[n]$ بزرگتر شود، این سیگنال به سیگنال $x[n]$ نزدیکتر خواهد شد.



Lec. 4

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] \times e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$\text{for } |n| < N_1 : \tilde{x}[n] = x[n]$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n] \times e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \times e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \times e^{-j\Omega n} \Rightarrow a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0)$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow \frac{1}{N} = \frac{\Omega_0}{2\pi}$$

Lec. 4

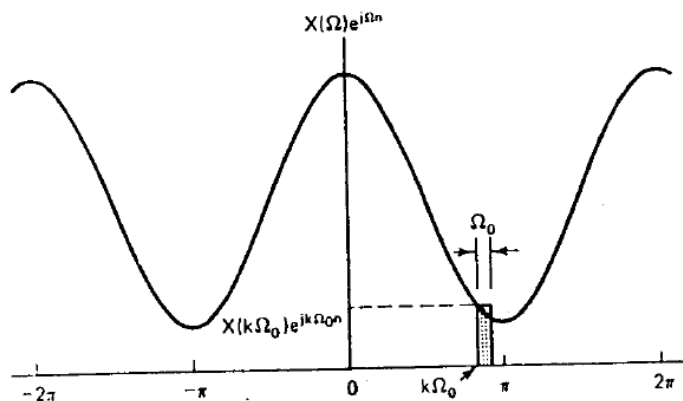
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

if $N \rightarrow \infty : \tilde{x}[n] = x[n]$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

DTFT



- شرط مهم برای همگرایی جمع نامتناهی بیان شده در DTFT این است که $x[n]$ بطور مطلق جمع پذیر باشد به عبارت دیگر داشته باشیم،

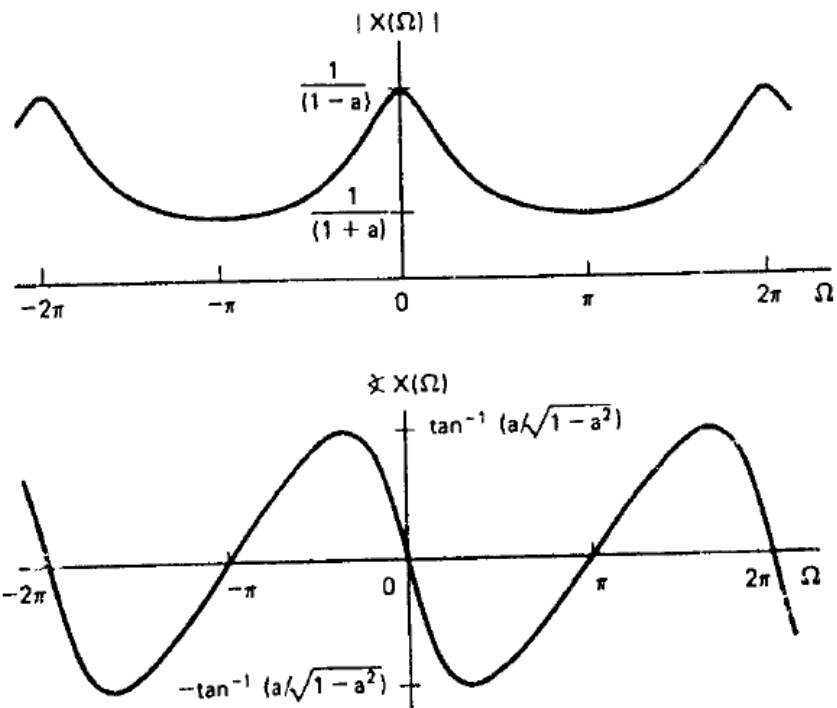
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

- مثال:

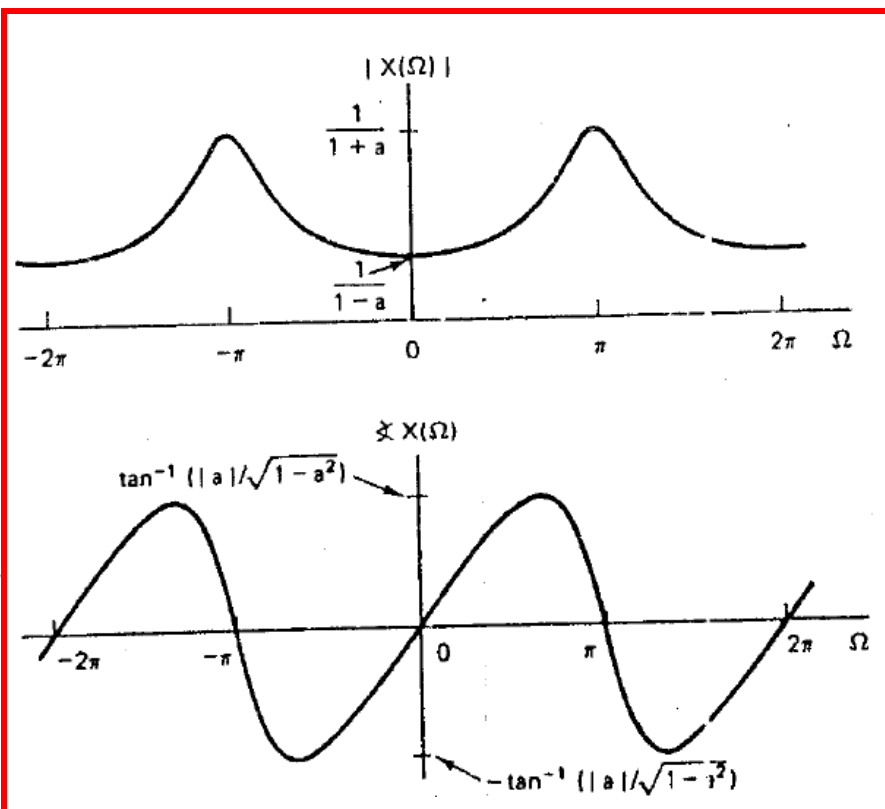
$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a e^{-j\Omega} \right)^n = \frac{1}{1 - a e^{-j\Omega}}$$

Lec. 4



$\longleftarrow a > 0$



$a < 0 \longrightarrow$

$$x[n] = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

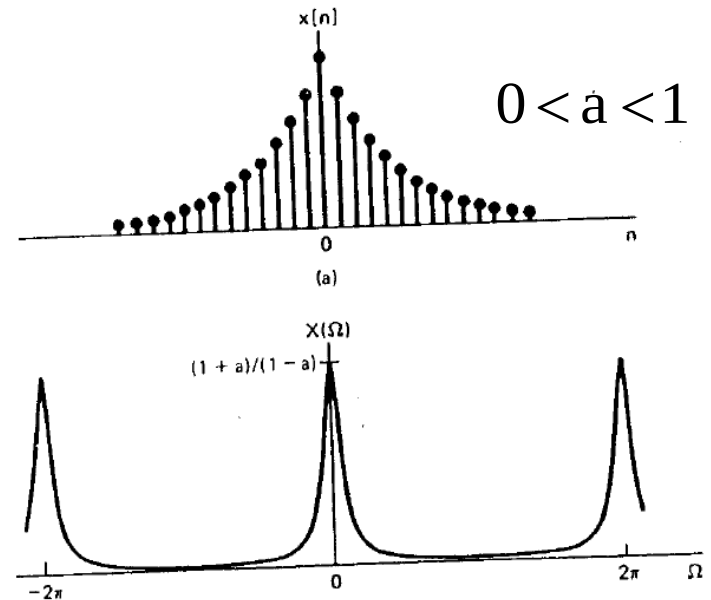
• مثال:

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j\Omega n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (ae^{j\Omega})^m$$

$$= \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} + \frac{1}{1 - ae^{j\Omega}} - 1$$

$$= \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$$

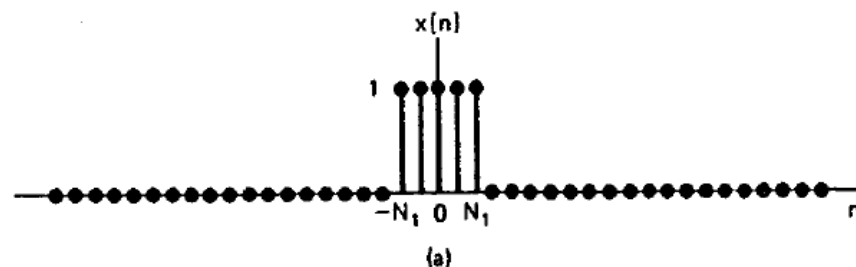


Lec. 4

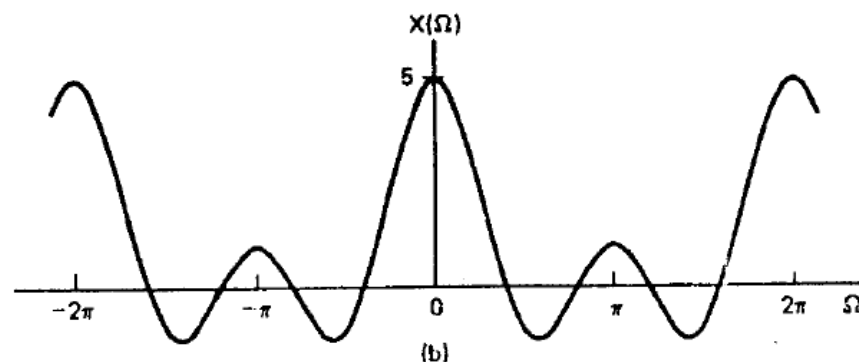
• مثال:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\Omega/2)}$$



$$N_1 = 2$$



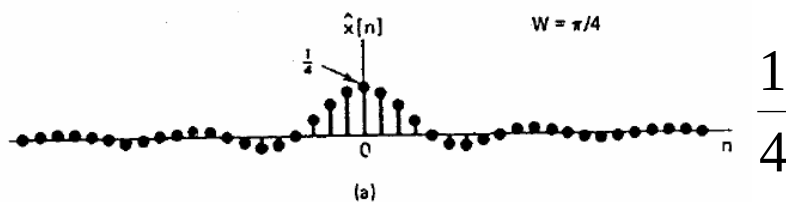
- همانطور که ملاحظه کردیم هیچ مشکلی در ارتباط با همگرایی سری فوریه یک سیگنال گسسته متناوب وجود نداشت. دلیل این امر این است که معادله سری فوریه گسسته یک جمع محدود بود.
- در مورد تبدیل فوریه گسسته نیز چون با یک انتگرال محدود سروکار داریم، مشکل همگرایی نخواهیم داشت. در نتیجه، اگر یک سیگنال گسسته متناوب را به کمک یک انتگرال از نمایی‌هایی مختلط با فرکانس‌هایی در محدوده $|\Omega| \leq W$ تقریب بزنیم، آنگاه برای $W = \pi$ خواهیم داشت: $\tilde{x}[n] = x[n]$

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

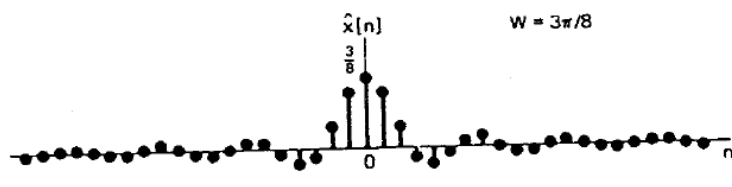
Lec. 4

$$x[n] = \delta[n] \quad X(\Omega) = 1$$

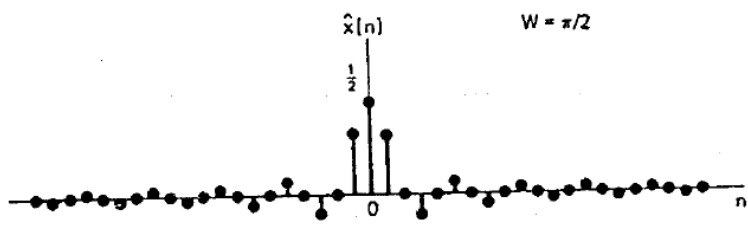
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$



$\frac{1}{4}$

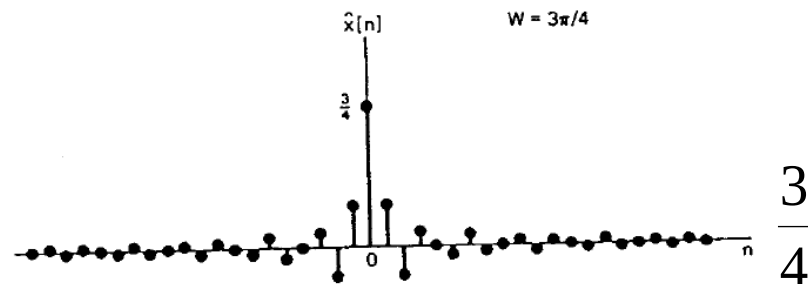


$\frac{3}{8}$

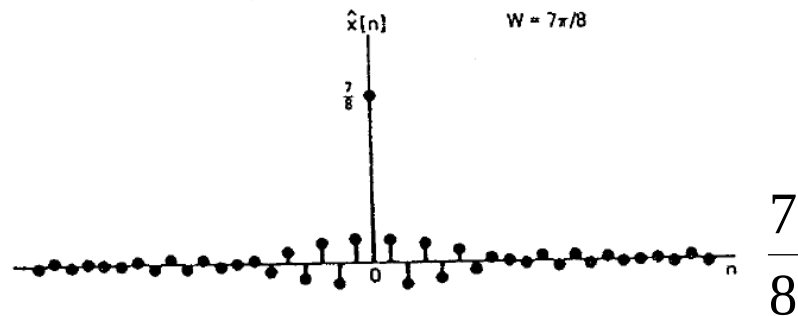


$\frac{1}{2}$

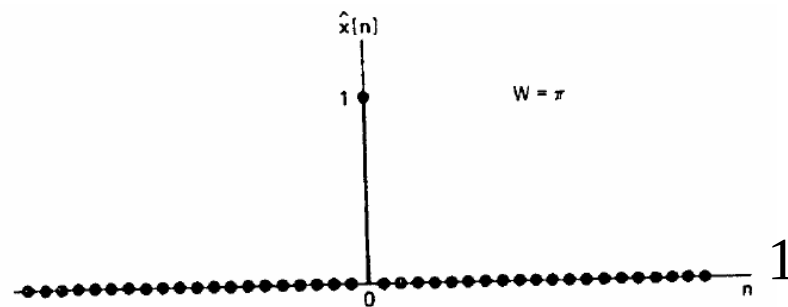
• مثال:



$\frac{3}{4}$



$\frac{7}{8}$



1

ضرایب سری فوریه به عنوان نمونه‌هایی از تبدیل فوریه یک دوره تناوب

- فرض کنید $\tilde{x}[n]$ یک تابع متناوب با دوره تناوب N و $x[n]$ نمایش یک دوره تناوب از این سیگنال باشد.

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n], & M \leq n \leq M + N - 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- می‌توان نشان داد،

$$Na_k = X(k \frac{2\pi}{N})$$

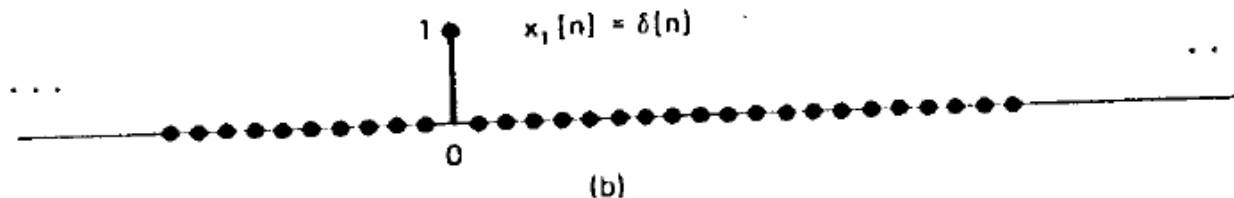
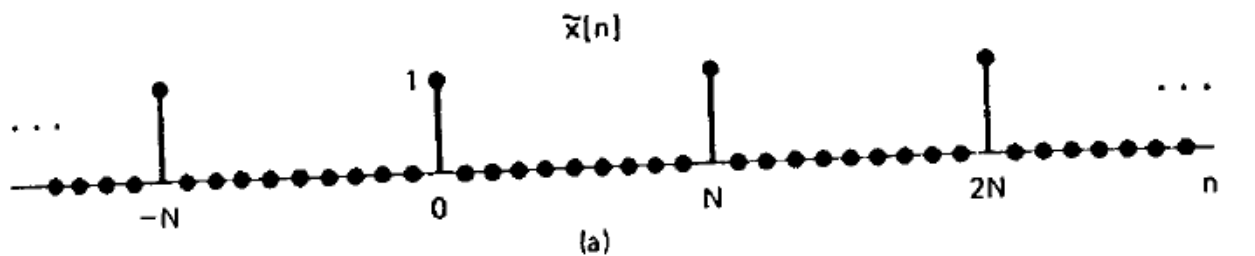
- بطوریکه a_k ضرایب سری فوریه $\tilde{x}[n]$ و $X(\Omega)$ تبدیل فوریه $x[n]$ می‌باشد.
- بنابراین می‌توان گفت Na_k متناظر با تبدیل فوریه یک دوره تناوب است.

• مثال:

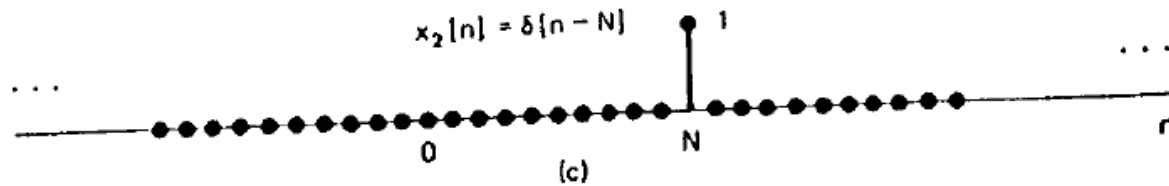
$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad a_k = \frac{1}{N}$$

$$x_1[n] = \delta[n]$$



Lec. 4



$$X_1(\Omega) = 1$$

$$x_2[n] = \delta[n - N] \Rightarrow X_2(\Omega) = e^{-j\Omega N}$$

$$Na_k = 1$$

تبدیل فوریه توابع متناوب

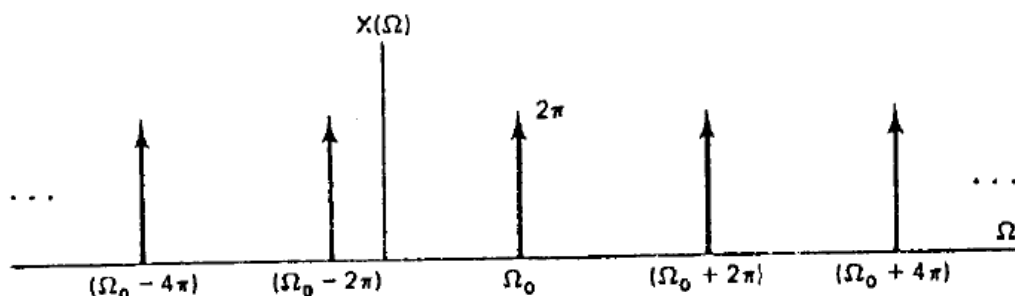
- همانطور که در توابع پیوسته دیدیم، تبدیل فوریه تابع $e^{j\omega_0 t}$ یک ضربه در $\omega = \omega_0$ می باشد

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

$$e^{j\Omega_0 n} = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n}$$

- بنابراین تبدیل فوریه تابع $x[n]$ به شکل زیر درخواهد آمد،

$$X(\Omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi q)$$



$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi q) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j(\Omega_0 + 2\pi r)n} = e^{j\Omega_0 n}$$

- حال شکل کلی تری را برای $x[n]$ در نظر بگیرید

$$x[n] = b_1 e^{j\Omega_1 n} + b_2 e^{j\Omega_2 n} + \dots + b_M e^{j\Omega_M n}$$

$$X(\Omega) = b_1 \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_1 - 2\pi q) + \cdots + b_M \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_M - 2\pi q)$$

• همانطور که می‌دانیم در صورتی تابع $e^{j\Omega_i n}$ متناوب خواهد بود که $\frac{2\pi}{\Omega_i}$ عددی گویا باشد.

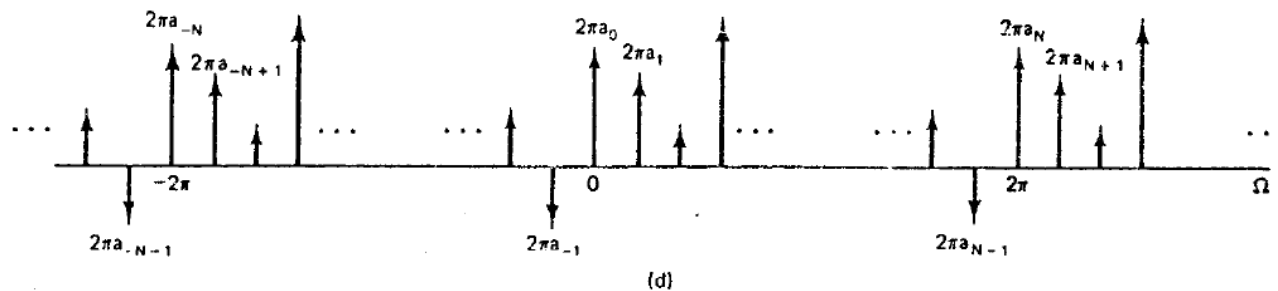
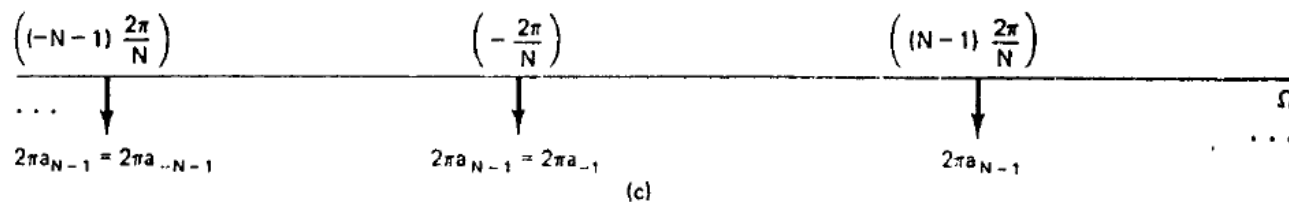
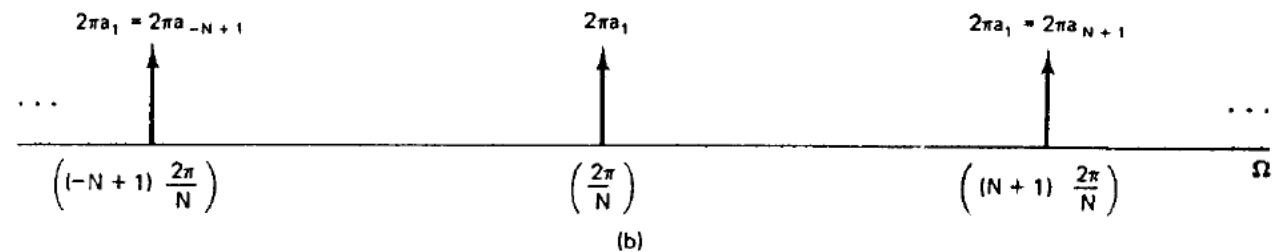
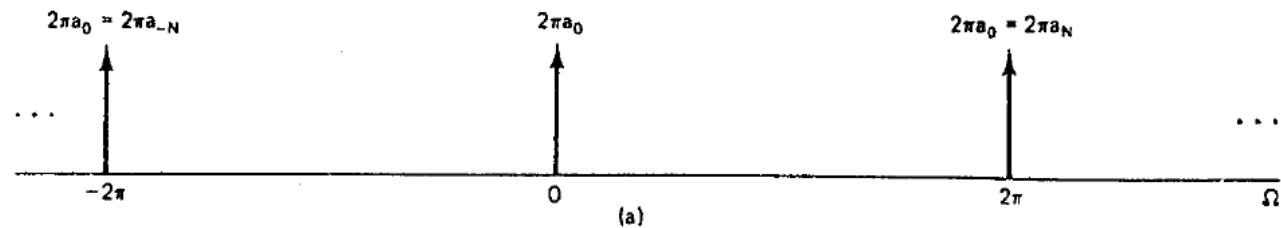
• حال فرض کنید $x[n]$ تابعی متناوب با دوره تناوب N باشد. می‌توان نوشت:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$X(\Omega) = a_0 \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - 2\pi q) + a_1 \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - \frac{2\pi}{N} - 2\pi q) + \cdots$$

$$+ a_{N-1} \sum_{q=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\Omega - (N-1)\frac{2\pi}{N} - 2\pi q)$$

Lec. 4



- از آنجائیکه ضرایب a_k ، متناوب می‌باشند، تبدیل فوریه تابع متناوب گسسته را می‌توان به عنوان یک قطار ضربه که در ضرایبی از دوره تناوب اصلی تکرار می‌شود در نظر گرفت.

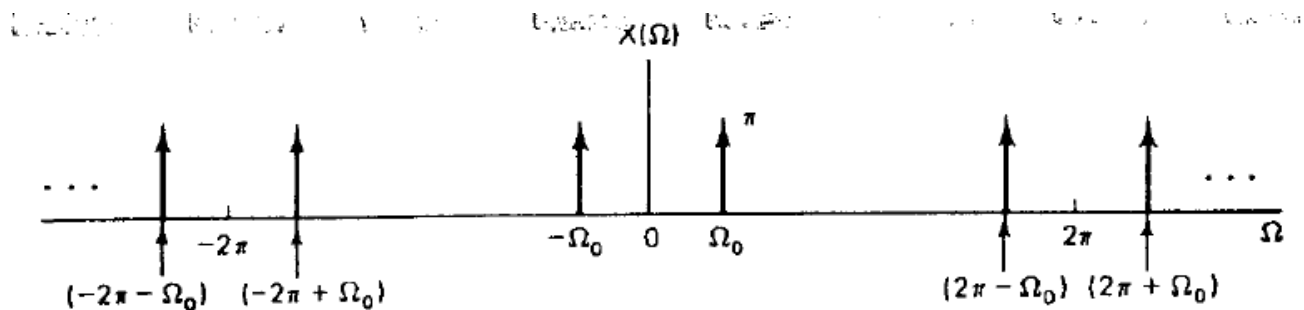
$$X(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

- مثال:

$$x[n] = \cos \Omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\Omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega_0 n}$$

$$X(\Omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi q) + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi q)$$

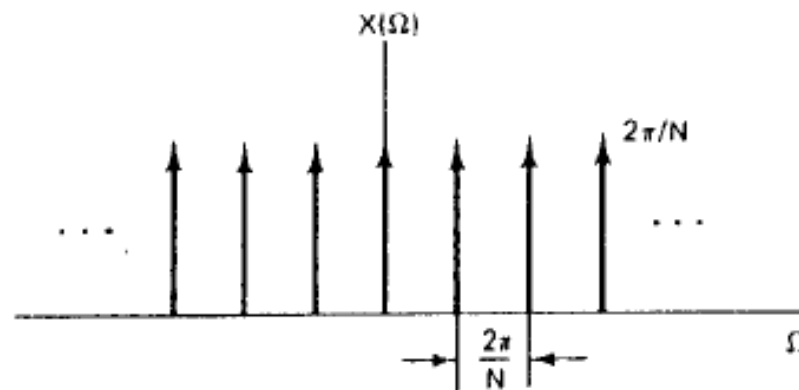
Lec. 4



• مثال:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN] \quad a_k = \frac{1}{N}$$

$$X(\Omega) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$



تبدیل فوریه گسسته (DFT)

- در ابتدا باید توجه کنیم که تبدیل فوریه گسسته (DFT) با تبدیل فوریه زمان گسسته تفاوت دارد. سیگنال غیر متناوب $x[n]$ را در نظر بگیرید که بازه محدود دارد.

$$x[n] = 0 \quad 0 \leq n \leq N_1 - 1$$

خارج محدوده

- همانطور که در استخراج تبدیل فوریه دیدیم، می‌توان یک سیگنال متناوب $\tilde{x}[n]$ ، با دوره تناوب N در نظر گرفت که روی یک دوره تناوب با سیگنال $x[n]$ برابر باشد. ($N \geq N_1$)

$$\tilde{x}[n] = x[n], \quad 0 \leq n \leq N - 1$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$\tilde{X}(k) = a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

• DFT دارای چند ویژگی مهم می باشد:

– سیگنال اصلی بازه محدود را به راحتی می توان با DFT تعیین کرد،

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{jk(2\pi/N)n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

– یک الگوریتم خیلی سریع تحت عنوان FFT برای محاسبه وجود دارد.

– به علت نزدیکی که بین DFT و تبدیل فوریه زمان گسسته وجود دارد، DFT تعدادی از ویژگی های تبدیل فوریه زمان گسسته را به ارث می برد.

خواص تبدیل فوریه زمان گسسته

$$X(\Omega) = f\{x[n]\}$$

$$x[n] = f^{-1}\{X(\Omega)\}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{f} X(\Omega)$$

1. $X(\Omega)$ همواره متناوب با دوره تناوب 2π می باشد.

2. خاصیت خطی بودن

$$x_1[n] \xleftrightarrow{f} X_1(\Omega)$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{f} X_2(\Omega)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{f} aX_1(\Omega) + bX_2(\Omega)$$

3. اگر $x[n]$ حقیقی باشد،

$$X(\Omega) = X^*(-\Omega)$$

$$\text{Ev}\{x[n]\} \xleftrightarrow{f} \text{Re}\{X(\Omega)\}$$

$$\text{Od}\{x[n]\} \xleftrightarrow{f} j \text{Im}\{X(\Omega)\}$$

4. انتقال در حوزه زمان و فرکانس

$$x[n] \xleftrightarrow{f} X(\Omega)$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{f} e^{-j\Omega n_0} X(\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{f} X(\Omega - \Omega_0)$$

5. خاصیت تفاضل و جمع

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{f} (1 - e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{f} \frac{1}{(1 - e^{-j\Omega})} X(\Omega) + \pi X(0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

مثال:

$$u[n] \xleftrightarrow{f} \frac{1}{1 - e^{-j\Omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi k)$$

6. خاصیت مقیاس‌بندی در حوزه زمان و فرکانس

1. این خاصیت با خاصیت مشابه در مورد تبدیل فوریه زمان پیوسته اندکی تفاوت دارد.

$$x[n] \xleftrightarrow{f} X(\Omega)$$

$$y[n] = x[-n]$$

$$Y(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[-n]e^{-j\Omega n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]e^{-j(-\Omega)m} = X(-\Omega)$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{f} X(-\Omega)$$

رابطه بدست آمده مشابه رابطه حاصل شده برای سیگنال‌های زمان پیوسته است.

- ولی با این وجود با توجه به اینکه n عدد صحیحی است نمی‌توان سیگنال $x[an]$ را برای a های کوچک‌تر از یک تعریف کرد. از طرفی اگر a را بزرگتر از ۱ و صحیح در نظر بگیریم، به عنوان مثال ۲ انتخاب کنیم، با این کار، فقط نمونه‌های زوج‌های زوج تابع $x[n]$ را اختیار کرده‌ایم. اگر بخواهیم مشابه آنچه در مورد سیگنال‌های پیوسته داشتیم برای سیگنال‌های گسسته نیز بیان کنیم، باید تابع زیر را بیان کنیم.

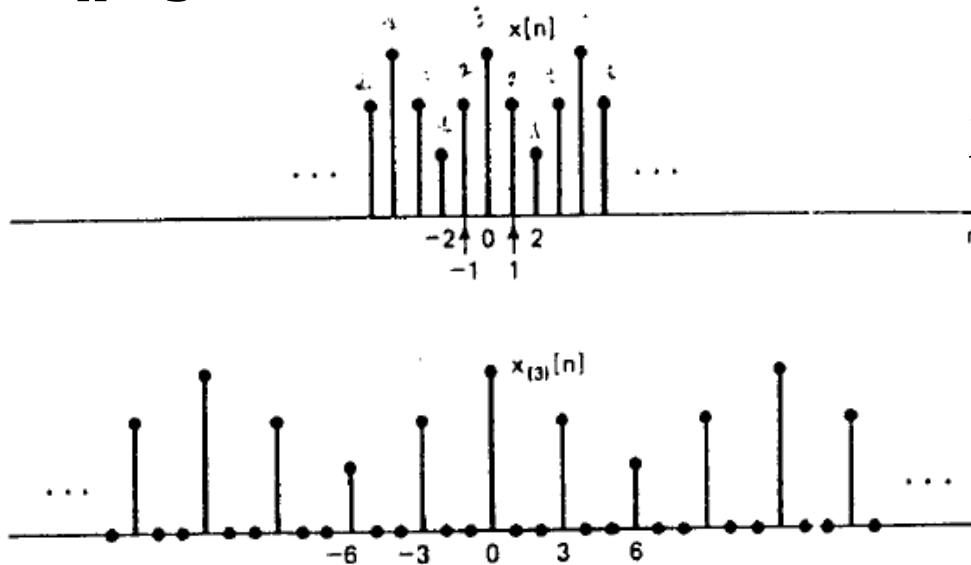
$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & n \text{ ضربی از } k \text{ باشد} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- حال این تابع را می‌توان یک تابع کند شده از تابع اصلی در نظر گرفت.

Lec. 4

$k = 3$

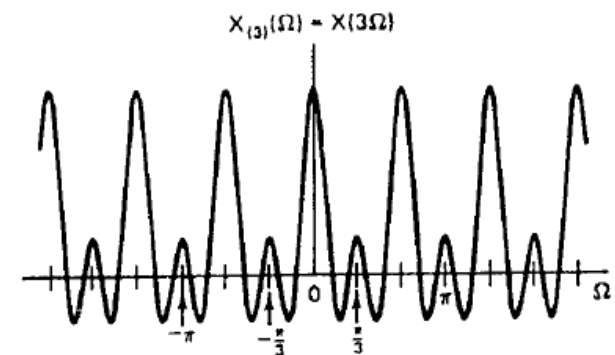
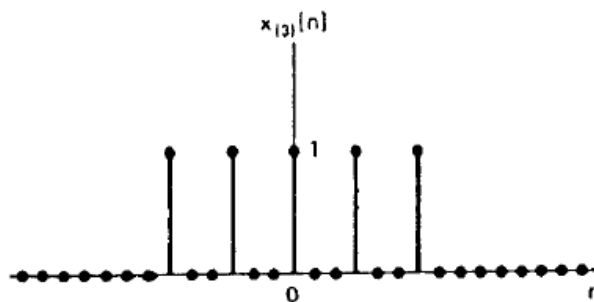
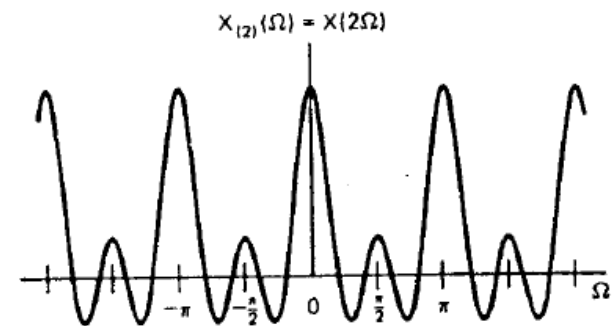
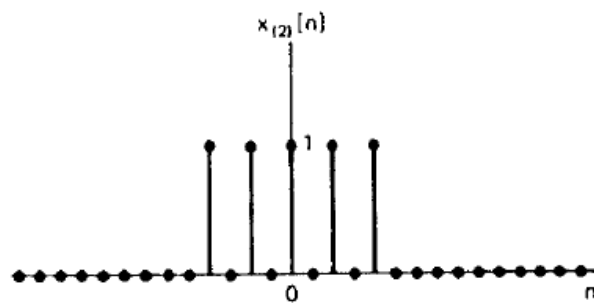
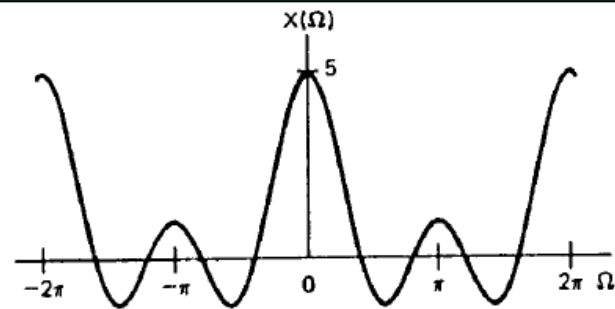
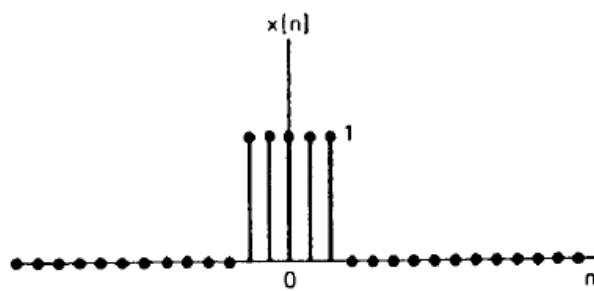
• مثال:



$$\begin{aligned} X_{(k)}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n] e^{-j\Omega n} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk] e^{-j\Omega rk} \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r] e^{-j(k\Omega)r} = X(k\Omega) \end{aligned}$$

$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{f} X(k\Omega)$$

Lec. 4



7. مشتق در حوزه فرکانس

$$x[n] \xleftrightarrow{f} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \times e^{-j\Omega n} \Rightarrow \frac{dX(\Omega)}{d\Omega} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} jnx[n] \times e^{-j\Omega n}$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{f} j \frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

8. رابطه پارسوال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

طیف چگالی انرژی

انرژی سیگنال

- برای سیگنال‌های متناوب، انرژی سیگنال را روی یک دوره تناوب محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

خاصیت کانولوشن

- یک سیستم گسسته LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ خروجی $y[n]$ و ورودی $x[n]$ در نظر بگیرید.

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \times H(\Omega) \longrightarrow \text{پاسخ فرکانسی}$$

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

• مثال:

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\Omega n} = e^{-j\Omega n_0}$$

$$Y(\Omega) = e^{-j\Omega n_0} X(\Omega) \quad y[n] = x[n - n_0]$$

$$h[n] = \alpha^n u[n], \quad H(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}},$$

$$x[n] = \beta^n u[n], \quad X(\Omega) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}},$$

• مثال:

$$Y(\Omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \times \frac{1}{1 - \beta e^{-j\Omega}} = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\Omega}},$$

Lec. 4

$$Y(\Omega) = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} - \frac{\beta}{1 - \beta e^{-j\Omega}} \right],$$

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha \alpha^n u[n] - \beta \beta^n u[n]] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]], \end{aligned}$$

$$\text{if } \alpha = \beta \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\Omega})^2} = \frac{j}{\alpha} e^{j\Omega} \frac{d}{d\Omega} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\Omega}} \right)$$

$$y[n] = \frac{1}{\alpha} (n+1) \alpha^{n+1} u[n+1] = (n+1) \alpha^n u[n+1]$$

$$y[n] = (n+1) \alpha^n u[n]$$

- در اینجا نیز مانند سیستم‌های پیوسته، باید توجه کرد که برای هر سیستمی LTI نمی‌توان پاسخ فرکانسی بیان کرد.
- شرط لازم برای داشتن پاسخ فرکانسی برای یک سیستم، پایدار بودن آن سیستم است. این شرط را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- در مورد سیگنال‌های پیوسته دیدیم که یک دوگانگی متقارن بین نمایش سیگنال و تبدیل فوریه سیگنال وجود دارد. این دوگانگی متقارن در مورد سیگنال‌های گسسته وجود ندارد. ولی یک دوگانگی بین معادلات سری فوریه زمان گسسته وجود دارد.

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

- به منظور اینکه بتوان کلی‌تر بحث کرد، دو سیگنال متناوب با دوره تناوب N در نظر بگیرید که به کمک رابطه زیر با هم در ارتباط هستند.

Lec. 4

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] e^{-jr(2\pi/N)m}$$

$$\text{if } m = k, r = n \Rightarrow f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{f} a_k \quad g[n] \xleftrightarrow{f} f[n]$$

$$\text{if } m = n, r = -k \Rightarrow f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} g[-k] e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$f[n] \xleftrightarrow{f} \frac{1}{N} g[-k]$$

- از آنجائیکه ضرایب سری فوریه یک سیگنال گسسته متناوب، خود یک دنباله متناوب می باشد، می توان a_k را در قالب یک سری فوریه بسط داد.
- در این صورت، ضرایب سری فوریه با توجه به خاصیت دوگانی به شکل زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{N} x[-n]$$

- مانند آنچه برای سیگنال های پیوسته بیان گردید، خاصیت دوگان بیان می کند که هر خاصیت سری فوریه گسسته، یک دوگان دارد.

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{f} a_k e^{-jk(2\pi/N)n_0}$$

$$e^{jM(2\pi/N)n} x[n] \xleftrightarrow{f} a_{k-M}$$

Lec. 4

$$\sum_{r=\langle N \rangle} x[r]y[n-r] \xleftrightarrow{f} Na_k b_k$$

$$x[n]y[n] \xleftrightarrow{f} \sum_{m=\langle N \rangle} a_m b_{k-m}$$

- علاوه بر خاصیت دوگانی که بین سری‌های فوریه گسسته وجود دارد، یک خاصیت دوگانی نیز بین تبدیل فوریه زمان گسسته و سری فوریه زمان پیوسته وجود دارد.

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

- فرض کنید $f(u)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π و $g[m]$ یک دنباله گسسته مرتبط به $f(u)$ باشد.

$$f(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g[m]e^{-j u m}$$

$$\text{if } u = \Omega, m = n \Rightarrow g[n] \xleftrightarrow{f} f(\Omega)$$

$$g[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} f(u) e^{j m u} du$$

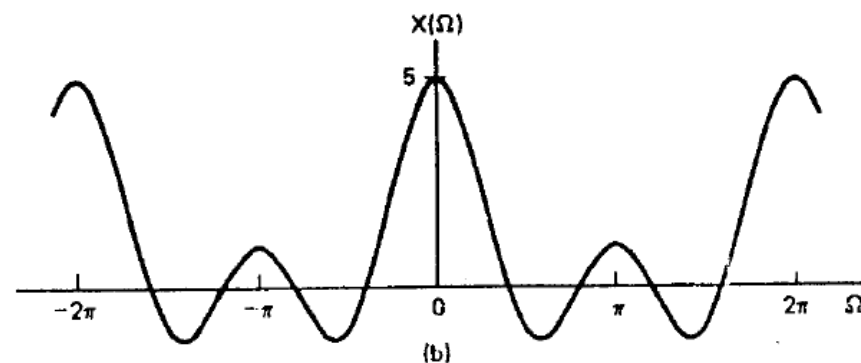
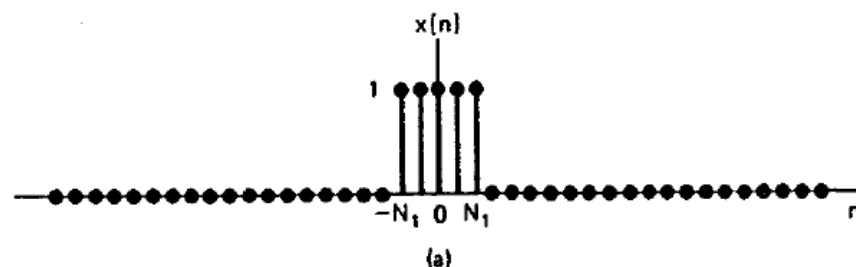
$$\text{if } u = t, m = -k \Rightarrow f(t) \xleftrightarrow{f} g[-k]$$

- در اینجا نیز $f(t)$ یک تابع متناوب با دوره تناوب $T_0 = 2\pi$ می باشد.

• مثال:

– تابع متناوب $x(t)$ را در نظر بگیرید که ضرایب سری فوریه آن از رابطه زیر

$$a_k = \begin{cases} 1, & |k| \leq N_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n} = \frac{\sin \Omega(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(\Omega/2)}$$

$$x(t) = \frac{\sin t(N_1 + \frac{1}{2})}{\sin(t/2)}$$

- به طور مشابه یک تبدیل فوریه زمان گسسته $X(\Omega)$ را با دوره تناوب زیر در نظر بگیرید.

$$-\pi \leq \Omega \leq \pi$$

$$X(\Omega) = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq W \\ 0, & W < |\Omega| \leq \pi \end{cases} \Rightarrow x[n] = \frac{\sin Wn}{n\pi}$$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \leq \frac{T_0}{2} \end{cases} \quad \text{if } T_1 = W, T_0 = 2\pi, \omega_0 = 1 \Rightarrow a_k = \frac{\sin kT_1}{k\pi}$$

$$a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$$