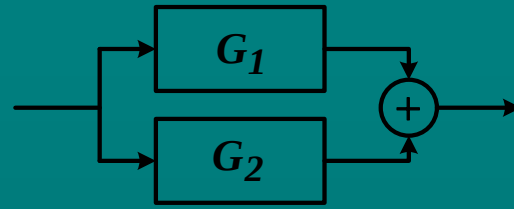


University
of Tehran



Faculty of
Engineering

The Laplace-Transform

Signals & Systems

Lecture 5

- همانطور که دیدیم، پاسخ یک سیستم خطی نامتغیر با زمان با پاسخ ضربه $h(t)$ به یک ورودی نمایی مختلط e^{st} به شکل زیر می باشد.

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad s = j\omega$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- اگر s به شکل کلی یک متغیر مختلط در نظر بگیریم، $H(s)$ تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه را نمایش خواهد داد.

- در حالت کلی، تبدیل لاپلاس یک سیگنال زمانی مانند $x(t)$ به شکل زیر تعریف می گردد:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad s = \sigma + j\omega$$

- ارتباط بین تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه را می توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

- همانطور که مشاهده می کنید، تبدیل لاپلاس $x(t)$ در حقیقت تبدیل فوریه تابع $x(t)e^{-\sigma t}$ می باشد. شرط لازم برای وجود تبدیل لاپلاس این است که تابع $x(t)e^{-\sigma t}$ به طور مطلق انتگرال پذیر باشد.

• مثال:

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a} \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

• مثال:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}$$

- شرط همگرایی

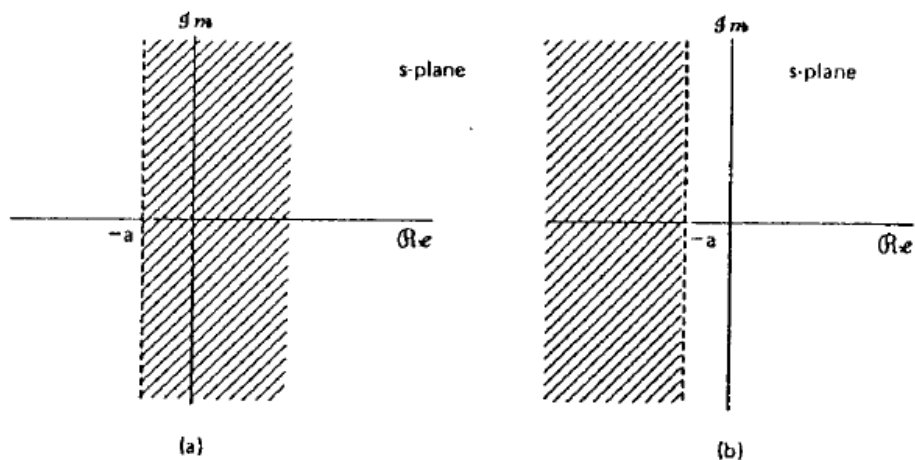
$$\text{Re}\{s+a\} < 0 \Rightarrow \text{Re}\{s\} < -a$$

Lec. 5

- به محدوده‌ای از مقادیر s ، که در آن انتگرال زیر همگرا باشد، محدوده‌ای همگرایی تبدیل لاپلاس گویند. (ROC)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- به عبارت دیگر، ROC شامل مقادیری از $s = \sigma + j\omega$ می‌باشد که برای آنها، تبدیل فوریه $x(t)e^{-\sigma t}$ همگرا باشد.



• مثال:

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t)] e^{-st} dt = \int_0^{\infty} [e^{-(s+1)t} + e^{-(s+2)t}] dt = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{2s+3}{s^2+3s+2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re}\{s\} > -1 \\ \text{Re}\{s\} > -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Re}\{s\} > -1$$

• تبدیل لاپلاس را همواره می توان به صورت نسبت دو چندجمله ای بر حسب S بیان کرد.

$$X(s) = \frac{D(s)}{N(s)}$$

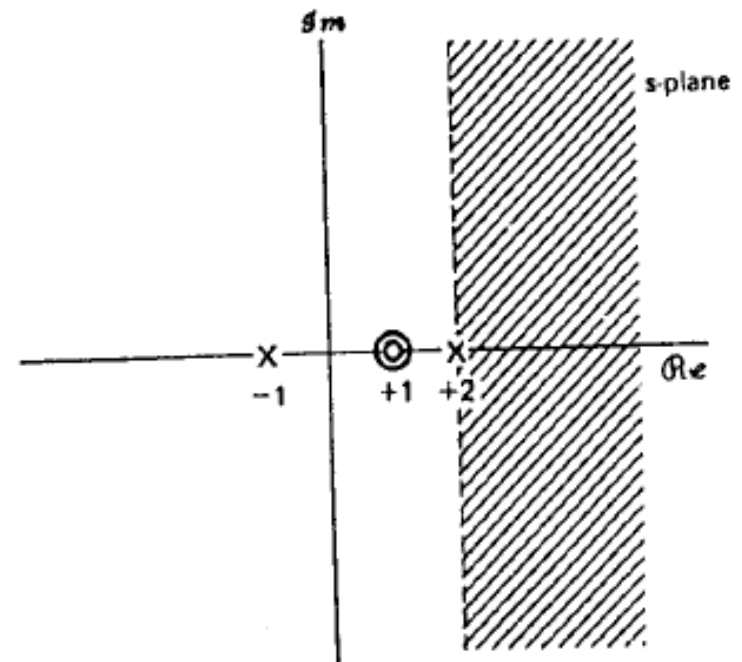
- ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج، قطب و ریشه‌های چند جمله‌ای صورت، صفر نامیده می‌شوند.

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$$

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \text{Re}\{s\} > 2$$

• مثال:



- با توجه به شکل صفحه قبل، از آنجائیکه ناحیه همگرایی شامل محور $j\omega$ ، نمی باشد، بنابراین تبدیل فوریه سیگنال داده شده همگرا نخواهد بود.
- فرض کنید $X(s)$ تبدیل لاپلاس سیگنال $x(t)$ باشد، آنگاه:
- $S = S_i$ یک قطب مرتبه r برای $X(s)$ می باشد، هرگاه حد زیر وجود داشته و عددی مخالف صفر باشد،

$$\lim_{s \rightarrow S_i} (s - S_i)^r X(s)$$
- قطب مرتبه ۱، قطب ساده نامیده می شود.
- $S = S_i$ یک صفر مرتبه r برای $X(s)$ می باشد، هرگاه حد زیر وجود داشته و عددی مخالف صفر باشد،

$$\lim_{s \rightarrow S_i} (s - S_i)^{-r} X(s)$$
- صفر مرتبه ۱، صفر ساده نامیده می شود.

ناحیه همگرایی برای تبدیل لاپلاس

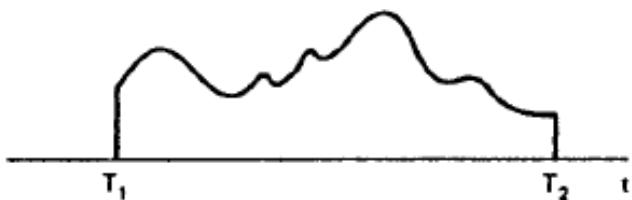
• دو سیگنال ممکن است دارای توصیف تبدیل لاپلاس یکسانی باشند ولی در ناحیه همگرایی متمایز از یکدیگر باشند. بنابراین داشتن اطلاعاتی در مورد ناحیه همگرایی کمک زیادی به تشخیص تمایز بین دو سیگنال خواهد کرد. در ادامه به بیان یکسری خصوصیات‌ها در مورد ناحیه همگرایی می‌پردازیم.

1. ROC مربوط به $X(S)$ ، شامل نوارهایی موازی با محور $j\omega$ در صفحه S می‌باشد.

2. برای یک $X(S)$ سره، ROC شامل هیچ قطبی نمی‌باشد.

3. اگر $x(t)$ یک سیگنال بازه محدود بوده و حداقل یک S وجود داشته باشد که به ازای آن تبدیل لاپلاس همگرا باشد، آنگاه ROC شامل تمام صفحه S خواهد بود.

- به منظور بررسی خاصیت ۳، تابع زیر را در نظر می گیریم:



- فرض می کنیم تابع $x(t)e^{-\sigma t}$ برای تعدادی از مقادیر σ ، که آنها را با σ_0 ، نمایش می دهیم به صورت مطلق انتگرال پذیر باشد.

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

- بنابراین خط $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ در ROC قرار دارد.

- در ادامه کافی است نشان دهیم که نقاطی با $\text{Re}\{s\} = \sigma_1$ در صفحه s ، در

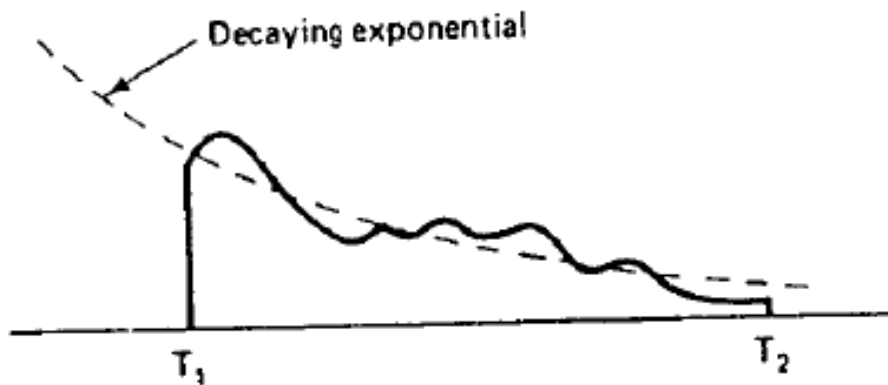
$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_1 t} dt = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt < \infty$$

ROC قرار دارد.

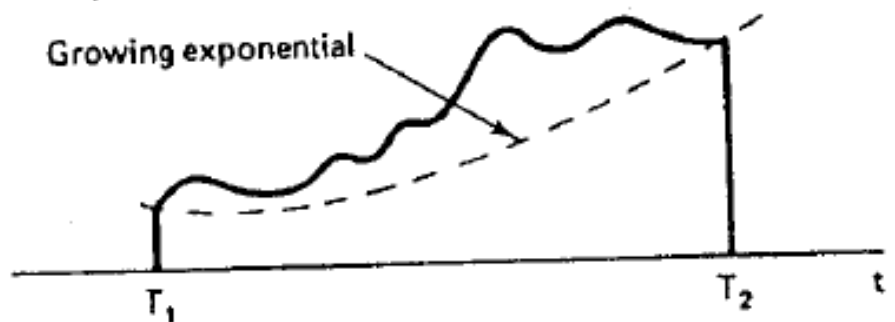
if $\sigma_1 > \sigma_0$

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt \leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0) T_1} \int_{T_1}^{T_2} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

- بنابراین تمام نقاطی از صفحه s که در رابطه زیر صدق کنند، جزو ROC خواهند بود. برای $\sigma_1 < \sigma_0$ نیز می‌توان از همین استدلال کمک گرفت.

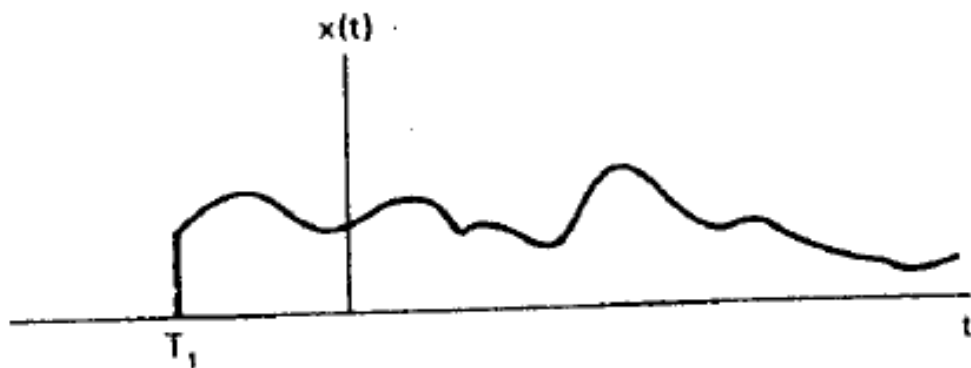


(a)



(b)

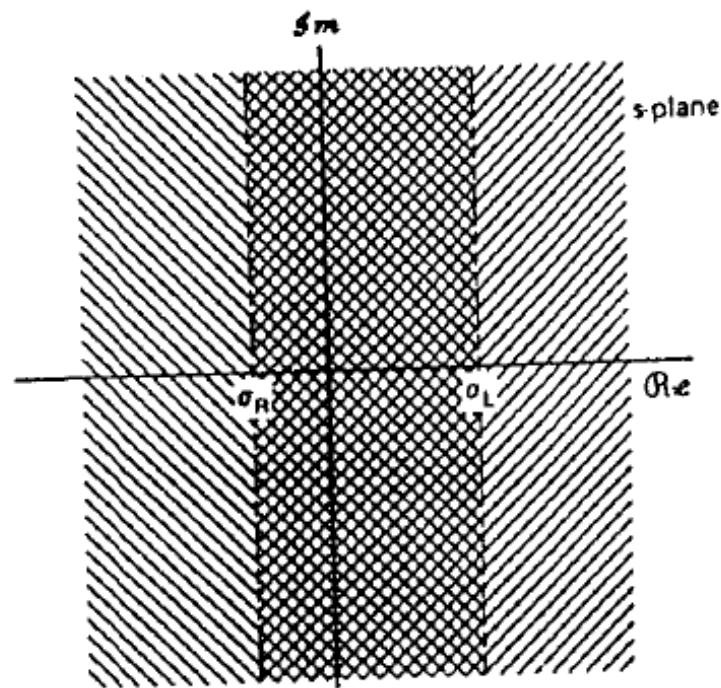
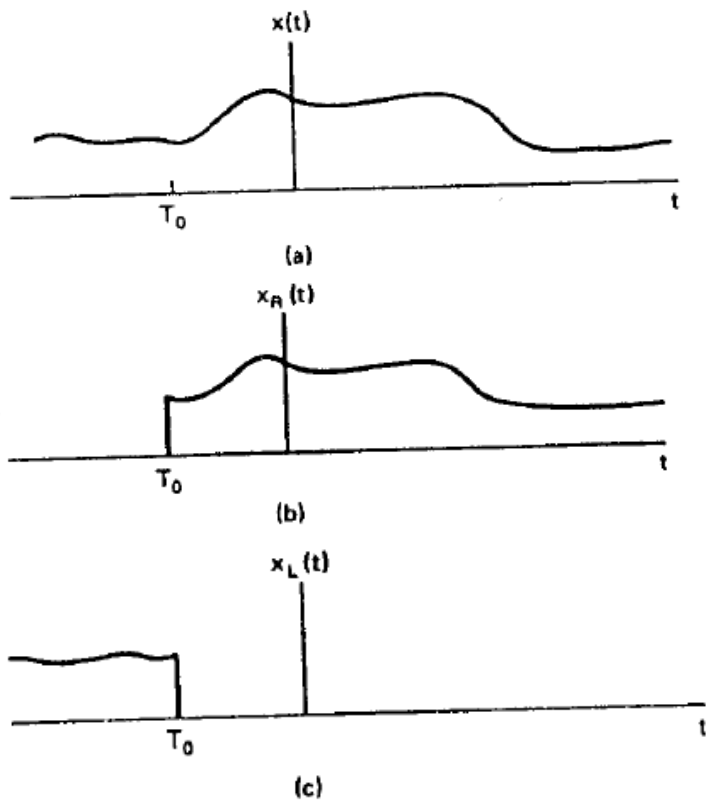
4. اگر سیگنال $x(t)$ سمت راستی باشد و خط $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ متعلق به ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر s که برای آنها $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$ برقرار باشد نیز متعلق به ROC خواهند بود.



5. اگر سیگنال $x(t)$ سمت چپی باشد و خط $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ متعلق به ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر s که برای آنها $\text{Re}\{s\} < \sigma_0$ برقرار باشد نیز متعلق به ROC خواهند بود.

Lec. 5

6. اگر یک سیگنال دوسویه باشد و خط $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ متعلق به ROC باشد،
آنگاه ROC یک نوار در صفحه s خواهد بود که شامل خط $\text{Re}\{s\} = \sigma_0$ می باشد.



$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \left[1 - e^{-(s+a)T} \right]$$

- با توجه به خاصیت شماره ۳، ناحیه همگرایی تمام صفحه S خواهد بود.
- همانطور که قبلاً اشاره شد، قطبها نمی‌توانند جزو ناحیه همگرایی باشند. حال با توجه به اینکه اشاره شد که ناحیه همگرایی تمام صفحه S می‌باشد، بنابراین باید در $s = -a$ مقدار تبدیل لاپلاس مقداری محدود باشد. برای بررسی این موضوع از قاعده هوپیتال کمک می‌گیریم.

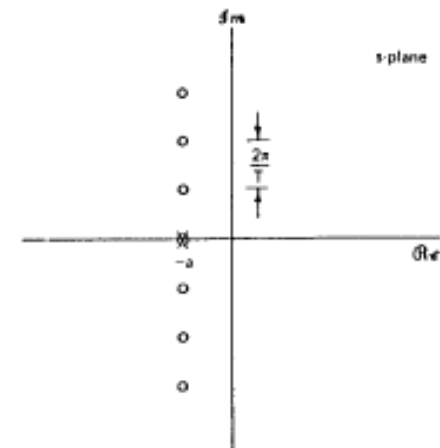
Lec. 5

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \frac{d[1 - e^{-(s+a)T}]}{d(s+a)} = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-(s+a)T} = T$$

• صفرهای تابع:

$$1 - e^{-(s+a)T} = 0 \Rightarrow e^{-(s+a)T} = 1 \Rightarrow (s+a)T = j2\pi k$$

$$s = -a + j\frac{2\pi k}{T}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



$$x(t) = e^{-b|t|}$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

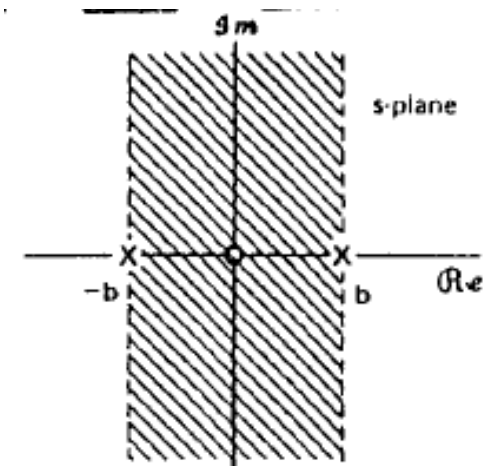
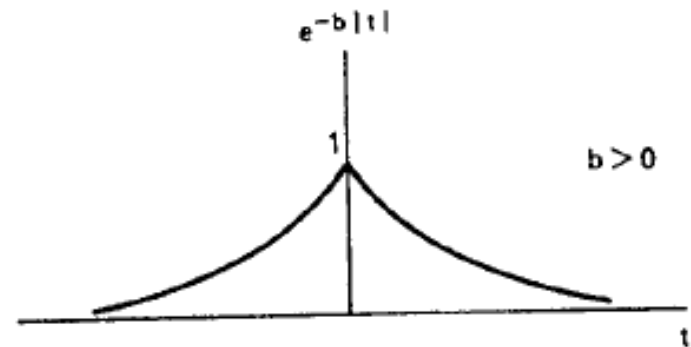
$$e^{-bt}u(t) \xleftrightarrow{\text{L.T.}} \frac{1}{s+b}, \quad \text{Re}\{s\} > -b$$

$$e^{bt}u(-t) \xleftrightarrow{\text{L.T.}} \frac{-1}{s-b}, \quad \text{Re}\{s\} < b$$

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{\text{L.T.}} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2},$$

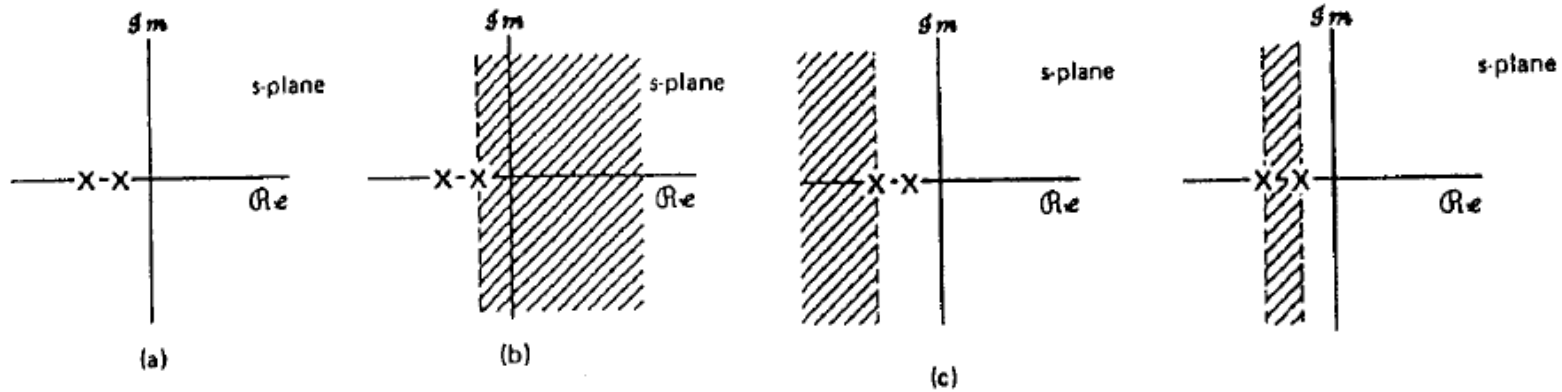
$$-b < \text{Re}\{s\} < b$$

• مثال:



- در مثال زیر، به بیان تبدیل لاپلاس با صفر و قطب یکسان و نواحی همگرایی متفاوت می پردازیم.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$



تبدیل لاپلاس معکوس

$$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = F^{-1}\{X(\sigma + j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

• مثال:

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)}$$

$$A = \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)X(s)] = 1$$

$$B = \lim_{s \rightarrow -2} [(s+2)X(s)] = -1$$

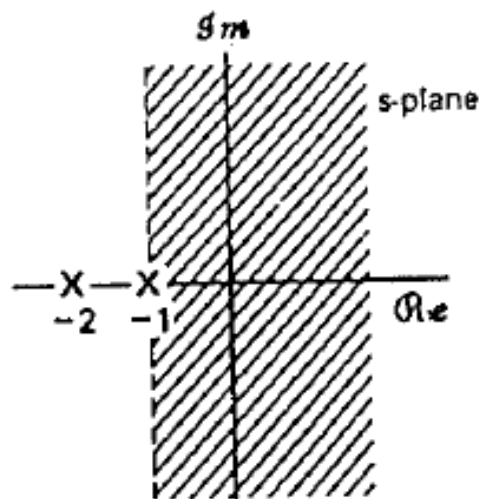
$$X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)}$$

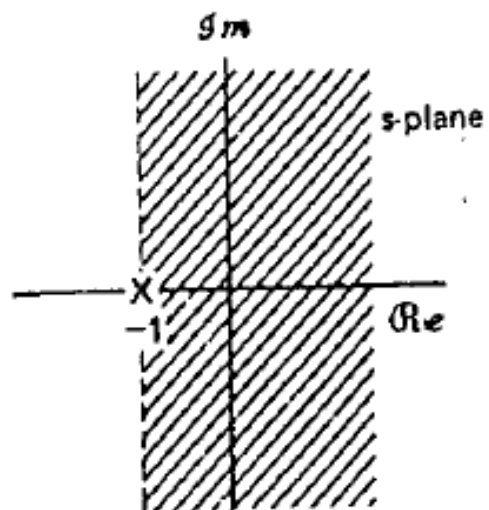
$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+2)}$$

$$e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

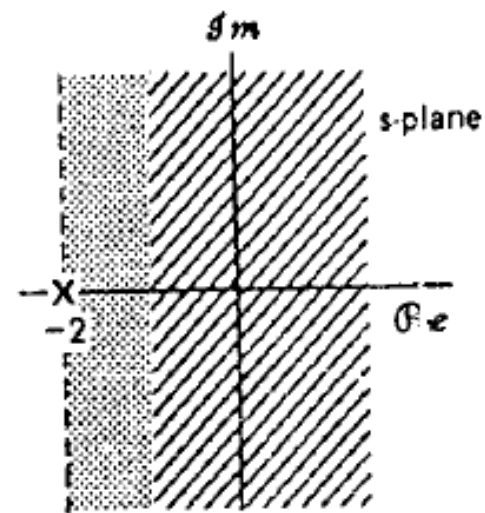
Lec. 5



(a)



(b)



(c)

Lec. 5

if $\text{Re}\{s\} < -2$

$$x(t) = \left[-e^{-t} + e^{-2t} \right] u(-t)$$

if $-2 < \text{Re}\{s\} < -1$

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$$

خواص تبدیل لاپلاس

• خطی بودن تبدیل لاپلاس

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &\xleftrightarrow{L} X_1(s), \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2(t) &\xleftrightarrow{L} X_2(s), \quad \text{ROC} = R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \xleftrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s), \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

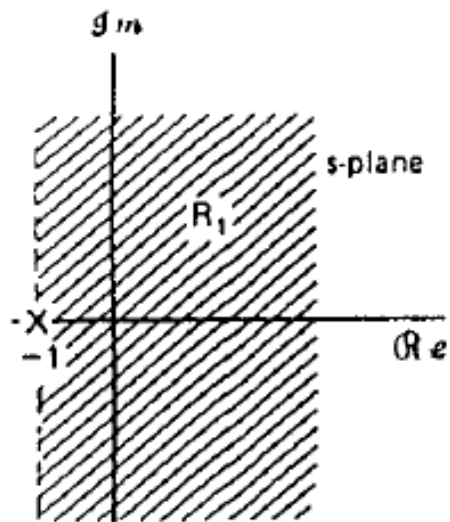
• مثال:

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

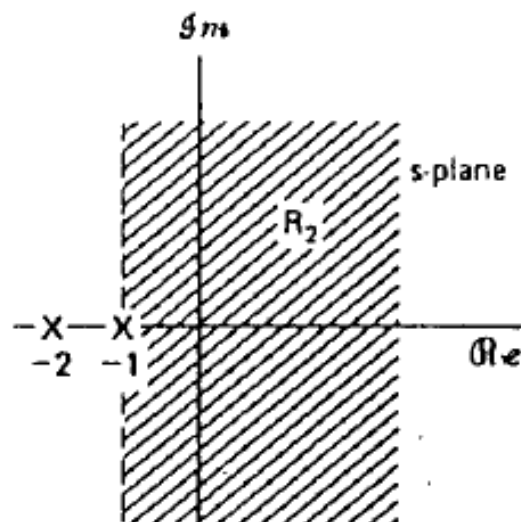
$$X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}, \quad \text{Re}\{s\} > -2$$

Lec. 5



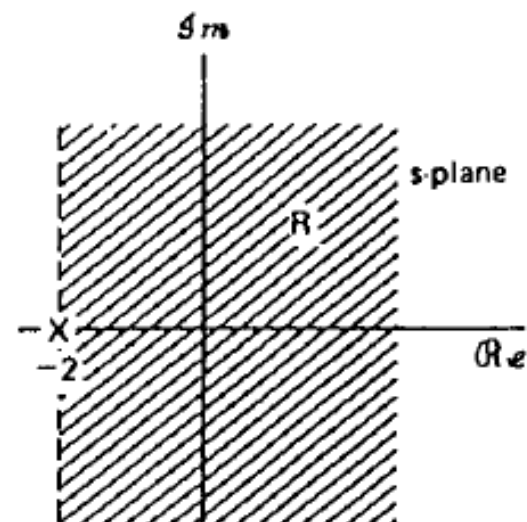
(a)

$\text{ROC}(X_1)$



(b)

$\text{ROC}(X_2)$



(c)

$\text{ROC}(X_1 - X_2)$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

• انتقال زمانی

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

• انتقال در حوزه S

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0), \quad \text{ROC} = R + \text{Re}\{s_0\}$$

• مقیاس بندی زمانی

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{ROC} = \frac{R}{a}$$

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &\stackrel{L}{\longleftrightarrow} X_1(s), \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2(t) &\stackrel{L}{\longleftrightarrow} X_2(s), \quad \text{ROC} = R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1(t) * x_2(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} X_1(s) \times X_2(s), \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

• خاصیت کانولوشن

• مشتق در حوزه زمان

$$x(t) \stackrel{L}{\longleftrightarrow} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{L}{\longleftrightarrow} sX(s), \quad R \subseteq \text{ROC}$$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

• مشتق در حوزه S

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, \quad R \subseteq \text{ROC}$$

• مثال:

$$x(t) = te^{-at}u(t) \quad e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^2}{2} e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^3}, \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \text{ROC: } \text{Re}\{s\} > -a$$

$$x(t) \xleftrightarrow{L} X(s), \quad \text{ROC} = R$$

• انتگرال در حوزه زمان:

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{X(s)}{s}, \quad \text{ROC} = R \cap \text{Re}\{s\} > 0$$

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \xrightarrow{L} X(s) \times \frac{1}{s} = \frac{X(s)}{s}$$

• قضیه مقدار اولیه و مقدار نهایی

– فرض کنید $x(t)$ برای $t < 0$ برابر صفر باشد و در مبدا شامل هیچ سیگولارتی مرتبه بالا و یا ضربهای نباشد.

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

تحلیل سیستم‌های LTI به کمک تبدیل لاپلاس

- یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h(t)$ در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ورودی $x(t)$ به شکل زیر قابل بیان می‌باشد:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)x(\tau)d\tau = h(t) * x(t)$$

$$Y(s) = H(s)X(s) \quad H(s): \text{تابع سیستم یا تابع تبدیل}$$

- بنابراین می‌توان گفت که تابع تبدیل یک سیستم LTI، در حقیقت نسبت تبدیل لاپلاس خروجی سیستم به ورودی سیستم می‌باشد.
- یک سیستم علی، یک سیستم راست سویه می‌باشد و لذا با توجه به آنچه گفته شد، ناحیه همگرایی این سیستم سمت راست راست‌ترین قطب تابع تبدیل سیستم خواهد بود.

- ناحیه همگرایی $H(s)$ یک سیستم می‌تواند با پایداری آن سیستم در ارتباط باشد.
- همانطور در بخش تبدیل فوریه دیدیم، تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدار همواره وجود دارد. بنابراین اگر سیستم بخواهد پایدار باشد، باید ناحیه همگرایی آن محور موهومی را شامل شود. به عبارت دیگر تمام قطب‌های آن، سمت چپ صفحه S واقع شده باشند.

• مثال: تابع داده شده هم پایدار است و هم علی

$$h(t) = e^{-t}u(t),$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

• اینکه ROC، سمت راست راست‌ترین باشد لزوماً دلیل بر علی بودن سیستم نخواهد بود. ولی اگر سیستم علی باشد، ROC سمت راست راست‌ترین قطب واقع خواهد شد.

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

• مثال:

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{L} \frac{e^s}{s+1}, \quad \text{Re}\{s\} > -1$$

سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل ضریب ثابت

• مثال:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad \frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{1}{s+3}$$

- معادله دیفرانسیل هیچگونه اطلاعاتی در مورد ناحیه همگرایی در اختیار ما قرار نمی‌دهد، مگر اینکه اطلاعاتی در مورد علی بودن یا پایدار بودن سیستم در اختیار داشته باشیم. در مورد مثال بالا داریم،

$$\text{if } \text{ROC} : \text{Re}\{s\} > -3 \Rightarrow h(t) = e^{-3t}u(t)$$

$$\text{if } \text{ROC} : \text{Re}\{s\} < -3 \Rightarrow h(t) = -e^{-3t}u(-t)$$

- در حالت کلی، یک معادله دیفرانسیل به شکل زیر در نظر بگیرید،

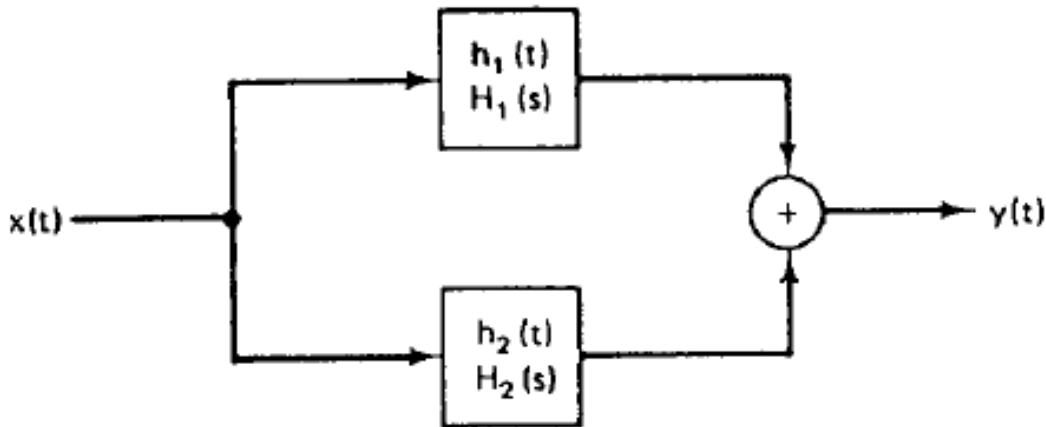
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right\} Y(s) = \left\{ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right\} X(s) \quad H(s) = \frac{\left\{ \sum_{k=0}^M b_k s^k \right\}}{\left\{ \sum_{k=0}^N a_k s^k \right\}}$$

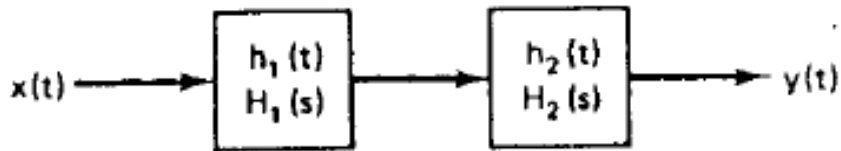
$$\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0 : \text{Zeros}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0 : \text{Poles}$$

ترکیب سیستم‌های LTI

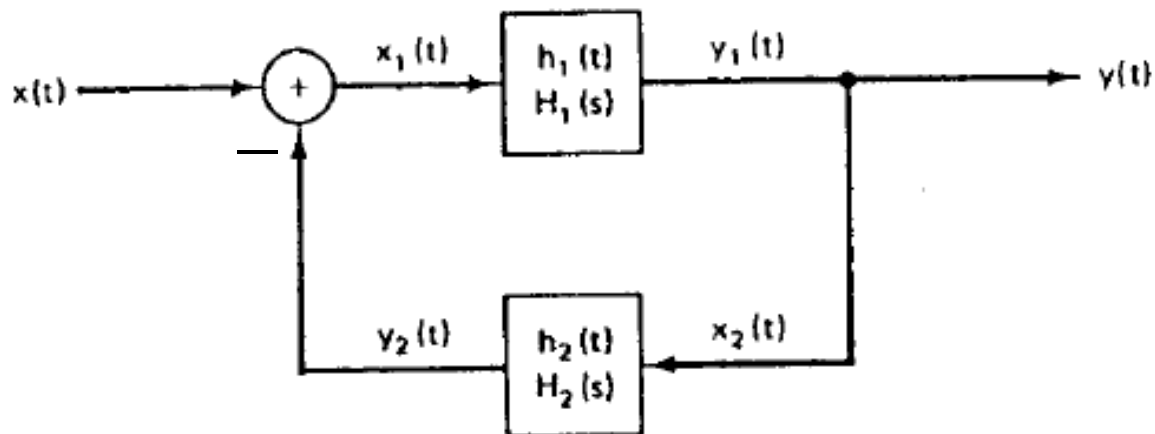


$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$



$$H(s) = H_1(s) \times H_2(s)$$

Lec. 5



$$Y_2(s) = H_2(s) \times Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - Y_2(s)]$$

$$Y(s) = H_1(s)X(s) - H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

تبدیل لاپلاس یک طرفه

- آنچه تا اینجا تحت عنوان تبدیل لاپلاس مورد بررسی قرار گرفت، تبدیل لاپلاس دوطرفه بود. در ادامه به بیان تبدیل لاپلاس یک طرفه خواهیم پرداخت. این تبدیل لاپلاس نقش مهمی در تحلیل سیستم‌های علی توصیف شده با یک معادله دیفرانسیل خطی ضریب ثابت با شرایط اولیه دارد.

- این نوع تبدیل لاپلاس به شکل زیر بیان می گردد:

$$X(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

- بنابر چهارمین خاصیت بیان شده در مورد ROC، ناحیه همگرایی این نوع تبدیل لاپلاس، همواره نیم صفحه راست صفحه S خواهد بود.

Lec. 5

$$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$$

• مثال:

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^n}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1)$$

• مثال:

$$X(s) = \frac{e^s}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

$$\tilde{X}(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-a} u(t+1) e^{-(s+a)t} dt$$

$$= e^{-a} \frac{1}{s+a}, \quad \text{Re}\{s\} > -a$$

خواص تبدیل لاپلاس یک طرفه

- تعداد زیادی از خواص تبدیل لاپلاس یک طرفه مشابه خواص تبدیل لاپلاس دوطرفه می باشد.
- مهم ترین تفاوت بین خواص تبدیل لاپلاس یک طرفه و دوطرفه، در خاصیت تبدیل لاپلاس مشتق می باشد.

$$\tilde{X}(s) = \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

$$= \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} dx(t) = e^{-st} x(t) \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$= sX(s) - x(0^+)$$

- به همین ترتیب، برای مشتق دوم خواهیم داشت:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \xleftrightarrow{\text{L.T.}} s^2X(s) - sx(0^+) - x'(0^+)$$

- کاربرد ابتدایی تبدیل لاپلاس یک طرفه، بدست آوردن حل یک معادله دیفرانسیل با شرایط اولیه غیر صفر می باشد.

- مثال:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$y(0^+) = 3, \quad \frac{dy(0^+)}{dt} = -5$$

$$x(t) = 2u(t)$$

Lec. 5

$$s^2 Y(s) - 3s + 5 + 3(sY(s) - 3) + 2Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = \frac{2}{s} + 3s + 4$$

$$Y(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$y(t) = [1 - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$