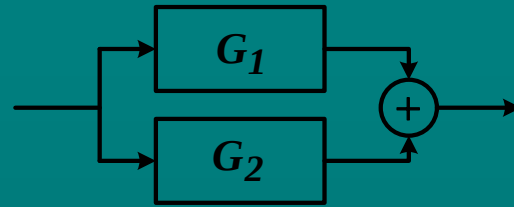


University
of Tehran



Faculty of
Engineering

The Z-Transform

Signals & Systems

Lecture 6

- همانطور که دیدیم، پاسخ یک سیستم خطی نامتغیر با زمان گسسته با پاسخ ضربه $h[n]$ به یک ورودی نمایی مختلط z^n به شکل زیر می باشد.

$$y[n] = H[n]z^n \quad z = e^{j\Omega} \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}$$

- اگر z یک متغیر مختلط با دامنه ای که به ۱ محدود نشده باشد، در نظر بگیریم، $H(z)$ تبدیل z پاسخ ضربه را نمایش خواهد داد.
- در حالت کلی، تبدیل z یک سیگنال زمانی مانند $x[n]$ به شکل زیر تعریف می گردد:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n} \quad z = re^{j\Omega}, \quad \Omega \in \mathbb{R}$$

- ارتباط بین تبدیل Z و تبدیل فوریه را می توان به شکل زیر بیان کرد:

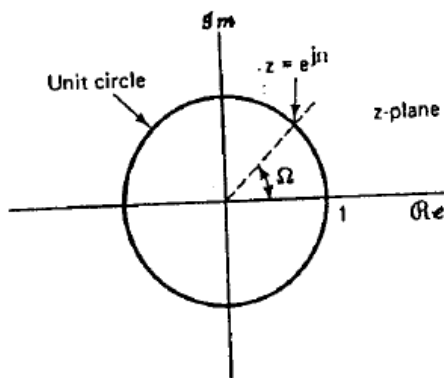
$$\begin{aligned} X(re^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n](re^{j\Omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ x[n]r^{-n} \right\} e^{-j\Omega n} \end{aligned} \quad X(re^{j\Omega}) = F\{x[n]r^{-n}\}$$

- همانطور که مشاهده می کنید، تبدیل Z سیگنال $x[n]$ در حقیقت تبدیل فوریه تابع $x[n]r^{-n}$ می باشد. شرط لازم برای وجود تبدیل Z این است که تابع $x[n]r^{-n}$ به طور مطلق جمع پذیر باشد.

- تابع توانی r^{-n} بسته به اینکه r بزرگتر یا کوچکتر از ۱ باشد، با افزایش n کاهش یا افزایش خواهد یافت.

- همچنین می توان نوشت: $X(z)|_{z=e^{j\Omega}} = F\{x[n]\}$

- همانطور که در مورد سیگنال های پیوسته دیدیم، تبدیل فوریه در حقیقت تبدیل لاپلاس روی محور موهومی می باشد. اما در مورد سیگنال های گسسته باید گفت که تبدیل فوریه، تبدیل Z در نقاطی از صفحه اعداد مختلط Z می باشد که در آن نقاط اندازه Z برابر ۱ باشد. این نقاط دایره ای به شعاع واحد و مرکز مبدأ در صفحه Z خواهد بود.



- شکل مقابل، این ناحیه را نشان می دهد و دایره واحد نامیده می شود.

- دایره واحد در صفحه Z ، همان نقش محور موهومی در صفحه S بازی می‌کند و می‌توان از آن برای تحلیل پایداری کمک گرفت.
- به منظور اینکه تبدیل Z همگرا باشد، باید تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا باشد.
- برای یک دنباله مشخص $x[n]$ انتظار داریم این همگرایی برای مقادیری از r ، وجود داشته و برای مقادیری وجود نداشته باشد.
- محدوده‌ای از مقادیر r ، که برای آنها همگرایی مورد نظر برآورده شود، ناحیه همگرایی (ROC) نامیده می‌شود.
- اگر ROC شامل دایره واحد باشد، تبدیل فوریه نیز همگرا خواهد بود.

• مثال:

$$x[n] = a^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n$$

– به منظور همگرایی باید داشته باشیم،

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |az^{-1}|^n < \infty \Rightarrow |az^{-1}| < 1 \Rightarrow |a| < |z|$$

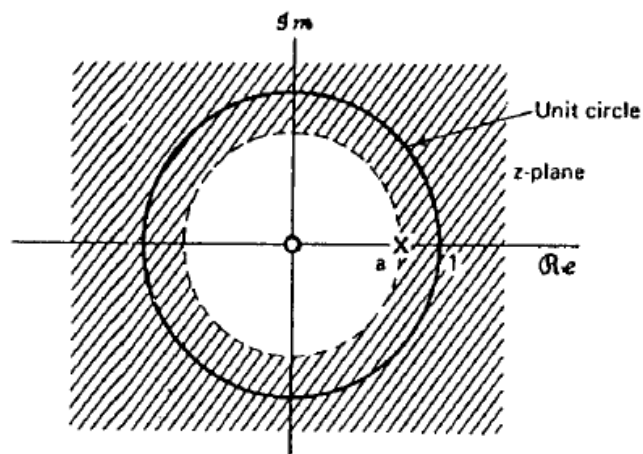
$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, \quad |z| > |a|$$

– تبدیل z ، سیگنال داده شده برای هر مقدار محدود a ، همگرا بوده ولی تبدیل فوریه سیگنال، فقط برای $|a| < 1$ همگرا می باشد.

- اگر $a=1$ باشد، سیگنال تبدیل به یک سیگنال پله واحد شده و تبدیل Z آن به شکل زیر درخواهد آمد،

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, |z| > 1$$

- در اینجا نیز مانند آنچه در مورد تبدیل لاپلاس دیدیم، در مورد یک کسر گویا از z ، ریشه‌های صورت، صفر و ریشه‌های مخرج، قطب خواهد بود.



- در مورد مثال بیان شده، یک صفر در $z=0$ و یک قطب در $z=a$ خواهیم داشت.

Lec. 6

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

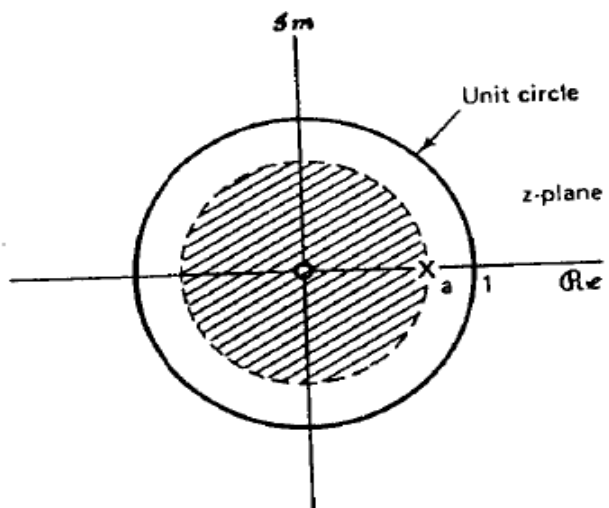
• مثال:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -a^n u[-n-1] z^{-n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} (az^{-1})^n = - \sum_{n=1}^{+\infty} (a^{-1}z)^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1}z)^n = 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

• شرط همگرایی:

$$|a^{-1}z| < 1 \Rightarrow |a| > |z|$$



Lec. 6

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \right\} z^{-n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] z^{-n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} z^{-1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3} z^{-1}\right)^n \\
 &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} = \frac{2z}{2z-1} + \frac{3z}{3z-1} \\
 &= \frac{z\{2(3z-1) + 3(2z-1)\}}{(2z-1)(3z-1)} = \frac{12z^2 - 5z}{6z^2 - 5z + 1} \\
 &= 2 + \frac{5z-2}{6z^2 - 5z + 1}
 \end{aligned}$$

• مثال:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

$$\left. \begin{aligned} |z| &> \frac{1}{2} \\ |z| &> \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |z| > \frac{1}{2}$$

Lec. 6

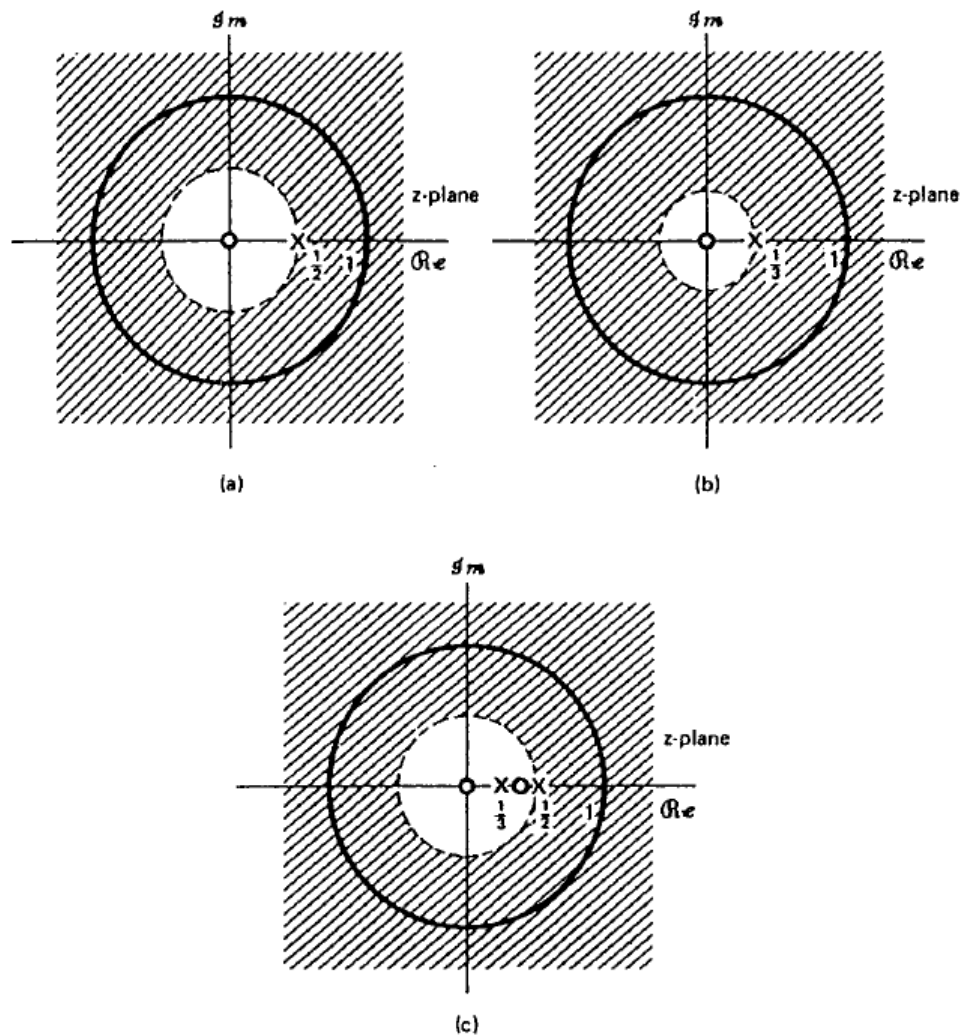
$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} X(z) = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > |a|$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$$

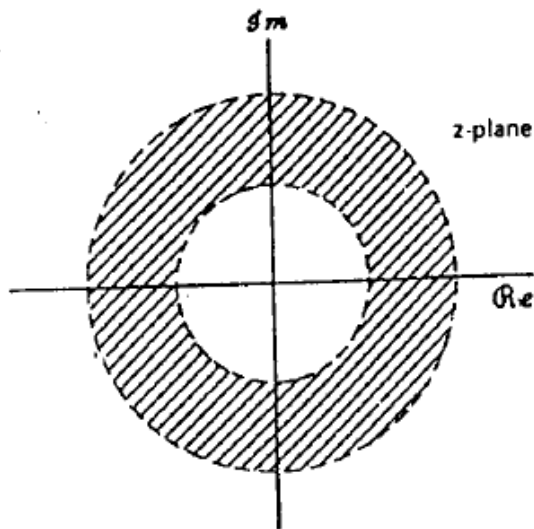
Lec. 6



- به محدوده‌ای از مقادیر z ، که در آن جمع زیر همگرا باشد، محدوده‌ای همگرایی تبدیل Z گویند. (ROC)

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}$$

- به عبارت دیگر، ROC شامل مقادیری از $z = re^{j\Omega}$ می‌باشد که در برای آنها، تبدیل فوریه $x[n]r^{-n}$ همگرا باشد.



- فرض کنید $X(z)$ تبدیل z سیگنال $x[n]$ باشد، آنگاه:
- $z = z_i$ یک قطب مرتبه r برای $X(z)$ می باشد، هرگاه حد زیر وجود داشته و عددی مخالف صفر باشد،

$$\lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i)^r X(z)$$

- قطب مرتبه ۱، قطب ساده نامیده می شود.
- $z = z_i$ یک صفر مرتبه r برای $X(z)$ می باشد، هرگاه حد زیر وجود داشته و عددی مخالف صفر باشد،

$$\lim_{z \rightarrow z_i} (z - z_i)^{-r} X(z)$$

- صفر مرتبه ۱، صفر ساده نامیده می شود.

ناحیه همگرایی برای تبدیل Z

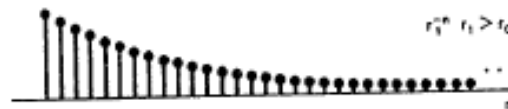
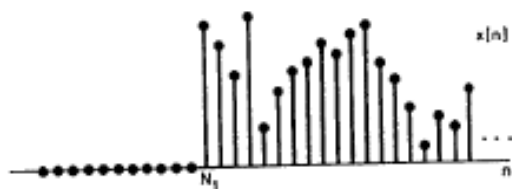
- دو سیگنال ممکن است دارای توصیف تبدیل Z یکسانی باشند ولی در ناحیه همگرایی متمایز از یکدیگر باشند. بنابراین داشتن اطلاعاتی در مورد ناحیه همگرایی کمک زیادی به تشخیص تمایز بین دو سیگنال خواهد کرد. در ادامه به بیان یکسری خصوصیات‌ها در مورد ناحیه همگرایی می‌پردازیم.

1. ROC مربوط به $X(z)$ ، شامل حلقه‌هایی به مرکزیت مبدأ صفحه Z می‌باشد.

2. برای یک $X(z)$ سره، ROC شامل هیچ قطبی نمی‌باشد.

3. اگر $x(z)$ یک سیگنال بازه محدود باشد، آنگاه ROC شامل تمام صفحه Z مگر $z=0$ و $z \rightarrow \infty$ خواهد بود.

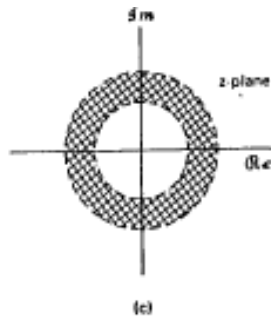
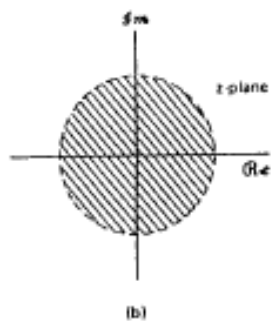
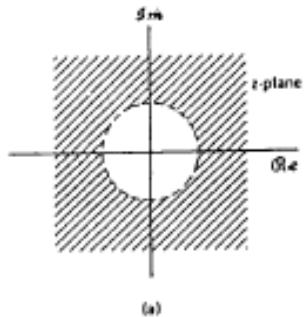
4. اگر سیگنال $x[n]$ سمت راستی باشد و دایره $|z| = r_0$ متعلق به ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر محدود Z که برای آنها $|z| > r_0$ برقرار باشد نیز متعلق به ROC خواهند بود.



5. اگر سیگنال $x[n]$ سمت چپی باشد و دایره $|z| = r_0$ متعلق به ROC باشد، آنگاه تمام مقادیر Z که برای آنها $|z| < r_0$ برقرار باشد نیز متعلق به ROC خواهند بود.

Lec. 6

6. اگر یک سیگنال دوسویه باشد و خط $|z| = r_0$ متعلق به ROC باشد، آنگاه ROC یک حلقه در صفحه Z خواهد بود که شامل خط $|z| = r_0$ می باشد.



$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \quad a > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

• مثال:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} (az^{-1})^n = \frac{1 - (az^{-1})^N}{1 - az^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

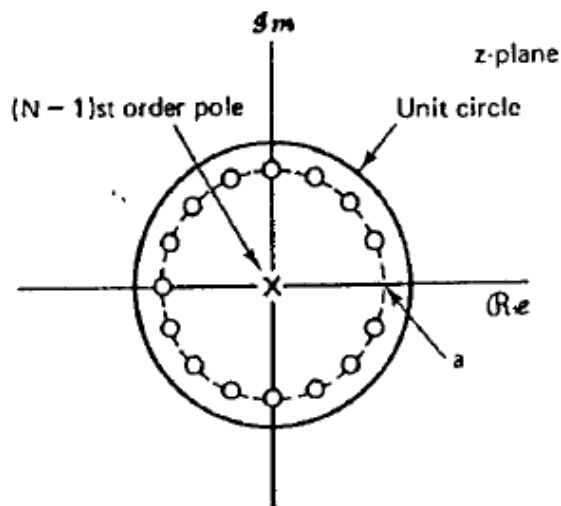
- با توجه به خاصیت شماره ۳، ناحیه همگرایی تمام صفحه z به استثنای صفر و بینهایت خواهد بود. با توجه به اینکه $x[n]$ برای $n < 0$ صفر است، بنابراین بینهایت جزو ناحیه همگرایی می‌باشد. همانطور که از رابطه بدست آمده دیده می‌شود، تبدیل z بدست آمده یک قطب مرتبه $N-1$ در مبدأ دارد. این تابع به ظاهر یک قطب در $z=a$ دارد. ولی این قطب با یک صفر حذف می‌شود.

• صفرهای تابع:

$$z^N = a^N \Rightarrow z = ae^{j2k\pi/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

• اگر $k=0$ باشد، صفر تابع با یکی از قطب تابع یکی شده و همدیگر را حذف می کنند.

$$z = ae^{j2k\pi/N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$



$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

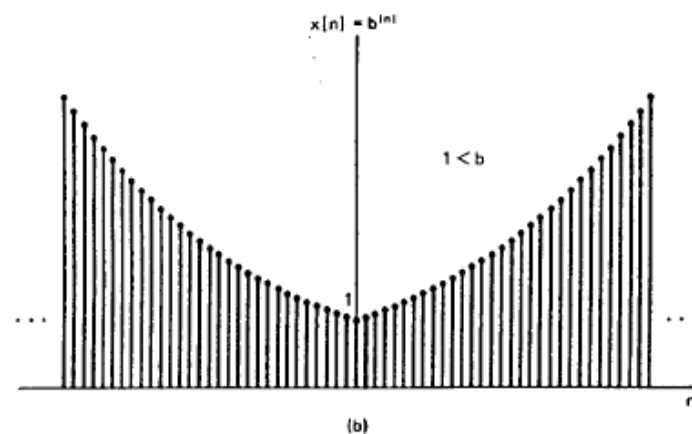
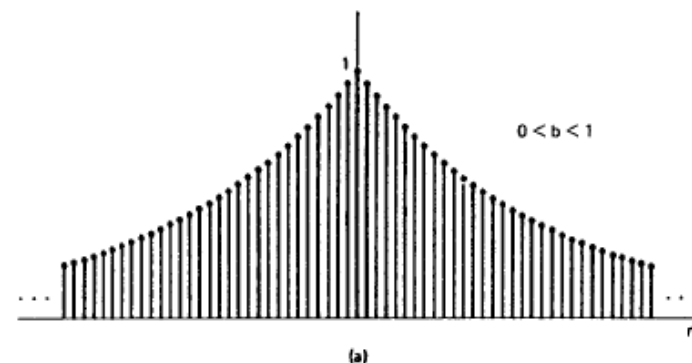
$$b^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{1}{1 + bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{-1}{1 + b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

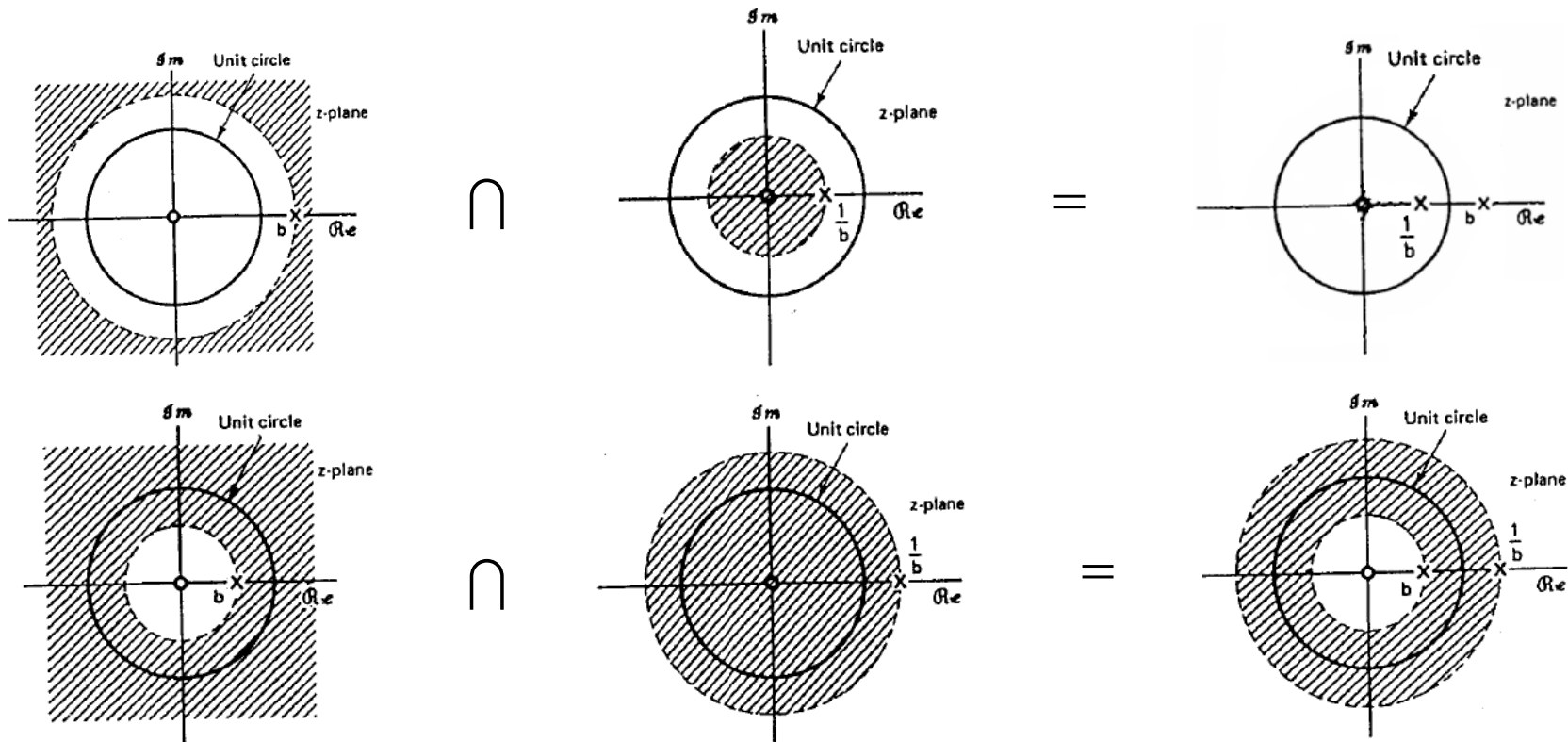
$$b^{|n|} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{1}{1 + bz^{-1}} + \frac{-1}{1 + b^{-1}z^{-1}},$$

$$b < |z| < \frac{1}{b}$$

• مثال:



Lec. 6

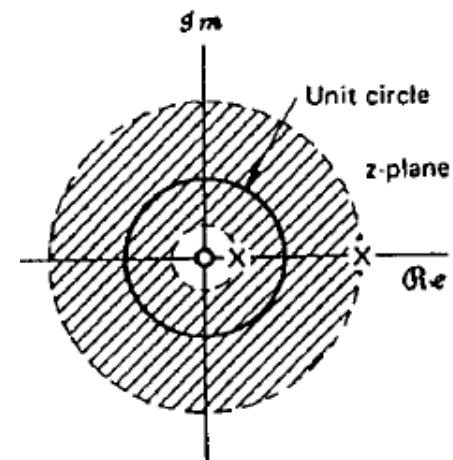
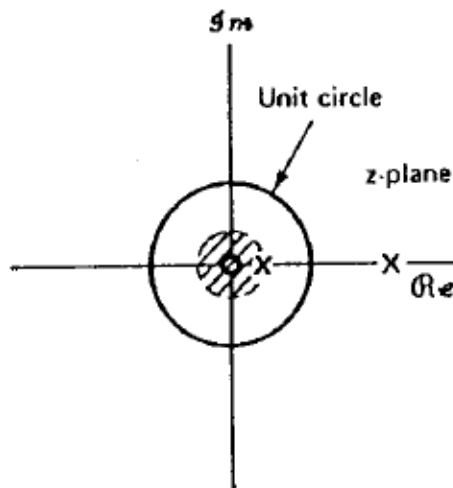
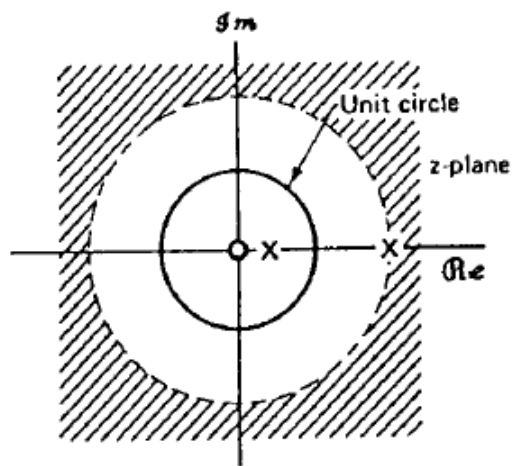
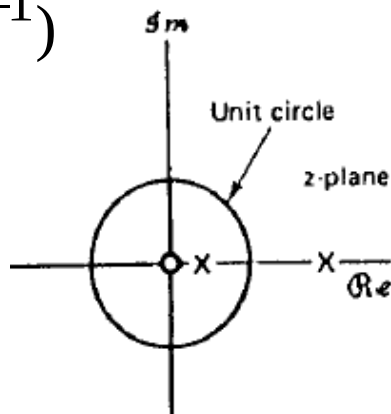


$$b^{|n|} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{(1-b^2)}{b} \frac{z}{(z+b)(z+b^{-1})}, \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$

Lec. 6

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

• مثال:



تبدیل Z معکوس

$$X(z) = X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]r^{-n}e^{j\Omega n} = F\{x[n]r^{-n}\}$$

$$x[n]r^{-n} = F^{-1}\{X(re^{j\Omega})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(re^{j\Omega})(r^n e^{j\Omega n}) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(z)z^n d\Omega$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=r} X(z)z^{n-1} dz$$

Lec. 6

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

• مثال:

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{B}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$A = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{4}} \left[(1 - \frac{1}{4}z^{-1})X(z) \right] = 1$$

$$B = \lim_{z \rightarrow \frac{1}{3}} \left[(1 - \frac{1}{3}z^{-1})X(z) \right] = 2$$

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Lec. 6

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad |z| > \frac{1}{3}$$

$$\frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n], \quad |z| > \frac{1}{3}$$

Lec. 6

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

• مثال:

$$X(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad \frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n], \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1], \quad |z| < \frac{1}{3}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

- در همه موارد، تبدیل Z یک تابع ممکن است یک کسر گویا نباشد. در چنین مواردی برای پیدا کردن عکس تبدیل Z می‌توان از بسط تیلور کمک گرفت.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

$$X(w) = \frac{1}{1 - w} = 1 + w + w^2 + \dots$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}$$

$$x[n] = a^n u[n]$$

if $|z| < |a|$

$$X(w) = \frac{1}{1 - \frac{1}{w}} = \frac{w}{w - 1} = 0 - w - w^2 - \dots = - \sum_{n=1}^{\infty} w^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \quad x[n] = -a^n u[-n - 1]$$

• مثال:

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|$$

$$X(w) = \log(1 + w) = 0 + w - \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{3}w^3 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} w^n$$

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n z^{-n}$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a^n, & n \geq 1 \\ 0, & n \leq 0 \end{cases}$$

$$x[n] = -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$$

خواص تبدیل Z

• خطی بودن تبدیل Z

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad \text{ROC} = R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{Z} aX_1(z) + bX_2(z), \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

• انتقال زمانی

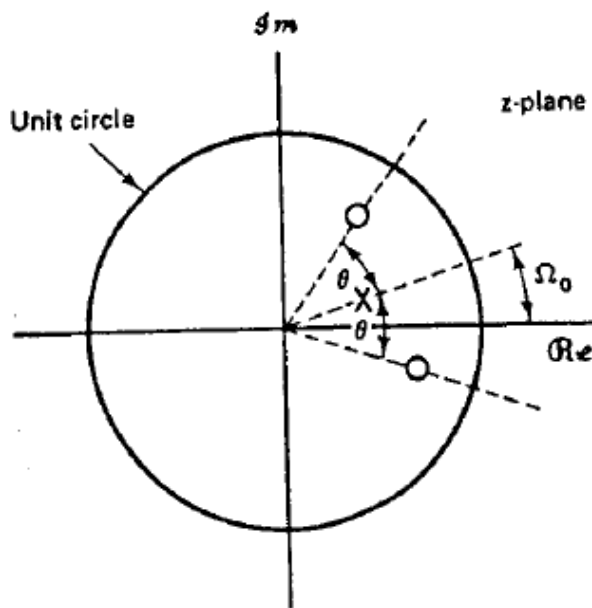
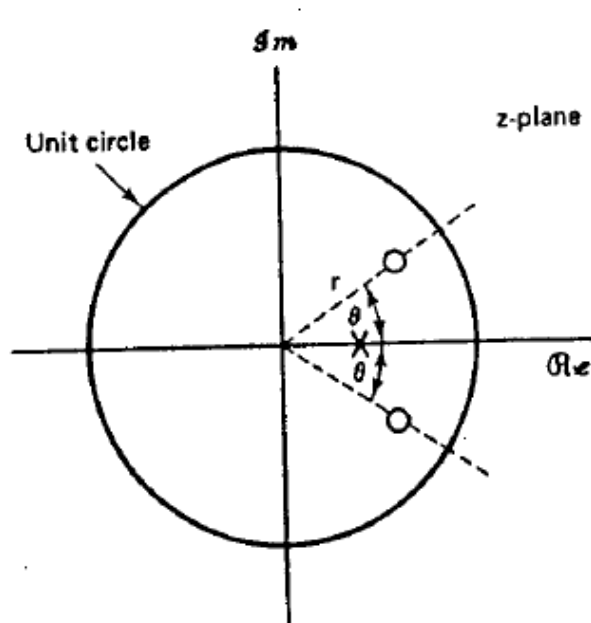
$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

• انتقال در حوزه فرکانس

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

$$e^{j\Omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\Omega_0} z), \quad \text{ROC} = R$$

Lec. 6



$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \text{ ROC} = z_0 R$$

$$x[n] \xleftrightarrow{z} X(z), \text{ ROC} = R$$

$$x[-n] \xleftrightarrow{z} X\left(\frac{1}{z}\right), \text{ ROC} = \frac{1}{R}$$

• معکوس زمانی

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z), \quad \text{ROC} = R_1 \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z), \quad \text{ROC} = R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \times X_2(z), \quad \text{ROC} = R_1 \cap R_2$$

• خاصیت کانولوشن

• مشتق در حوزه Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \quad \text{ROC} = R$$

$$nx[n] \xleftrightarrow{L} -z \frac{dX(z)}{dz}, \quad \text{ROC} = R$$

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \quad |z| > |a|, \quad x[n] = ?$$

• مثال:

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \quad |z| > |a|,$$

$$a(-a)^n u[n] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{a}{1 + az^{-1}}$$

$$a(-a)^{n-1} u[n-1] \xleftrightarrow{\text{Z.T.}} \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}$$

$$nx[n] = -(-a)^n u[n-1] \Rightarrow x[n] = -\frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$$

$$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \quad |z| > |a|,$$

• مثال:

$$X(z) = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right), \quad |z| > |a|, \quad x[n] = na^n u[n]$$

• قضیه مقدار اولیه

– فرض کنید $x[n]$ برای $n < 0$ برابر صفر باشد،

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

تحلیل سیستم‌های LTI به کمک تبدیل Z

- یک سیستم LTI با پاسخ ضربه $h[n]$ در نظر بگیرید. خروجی این سیستم به ورودی $x[n]$ به شکل زیر قابل بیان می‌باشد:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n-k]x[k] = h[n] * x[n]$$

تابع سیستم یا تابع تبدیل: $H(z)$ $Y(z) = H(z)X(z)$

- بنابراین می‌توان گفت که تابع تبدیل یک سیستم LTI، در حقیقت نسبت تبدیل Z خروجی سیستم به ورودی سیستم می‌باشد.
- یک سیستم علی، یک سیستم راست سویه می‌باشد و لذا با توجه به آنچه گفته شد، ناحیه همگرایی این سیستم خارج بیرون‌ترین قطب تابع تبدیل سیستم خواهد بود.

- ناحیه همگرایی $H(z)$ یک سیستم می‌تواند با پایداری آن سیستم در ارتباط باشد.
- همانطور در بخش تبدیل فوریه دیدیم، تبدیل فوریه پاسخ ضربه یک سیستم LTI پایدار همواره وجود دارد. بنابراین اگر سیستم بخواهد پایدار باشد، باید ناحیه همگرایی آن دایره واحد را شامل شود. به عبارت دیگر تمام قطب‌های آن داخل دایره واحد واقع شده باشند.

سیستم‌های توصیف شده با معادلات تفاضلی ضرب ثابت

• مثال:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] - \frac{1}{3}x[n-1],$$

$$Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z) - \frac{1}{3}z^{-1}X(z) \quad \frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

• معادله تفاضلی هیچگونه اطلاعاتی در مورد ناحیه همگرایی در اختیار ما قرار نمی‌دهد، مگر اینکه اطلاعاتی در مورد علی بودن یا پایدار بودن سیستم در اختیار داشته باشیم. در مورد مثال بالا داریم،

if ROC: $|z| > \frac{1}{2}$, سیگنال راست سویه

if ROC: $|z| < \frac{1}{2}$, سیگنال چپ سویه

- در حالت کلی، یک معادله تفاضلی به شکل زیر در نظر بگیرید،

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

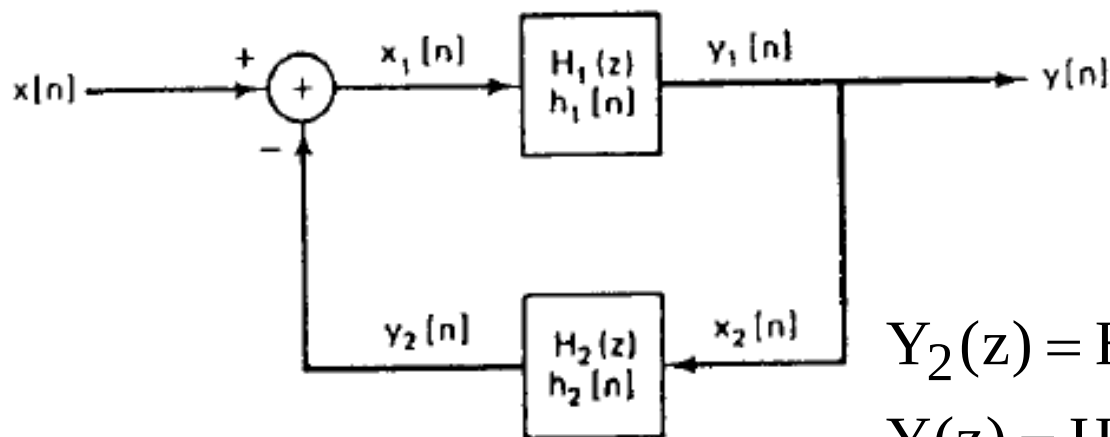
$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right\} Y(z) = \left\{ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right\} X(z) \quad H(z) = \frac{\left\{ \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right\}}{\left\{ \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} \right\}}$$

$$\sum_{k=0}^M b_k z^{p-k} = 0 : \text{Zeros}$$

$$p = \text{Max}\{M, N\}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{p-k} = 0 : \text{Poles}$$

ترکیب سیستم‌های LTI



$$Y_2(z) = H_2(z) \times Y(z)$$

$$Y(z) = H_1(z)[X(z) - Y_2(z)]$$

$$Y(z) = H_1(z)X(z) - H_1(z)H_2(z)Y(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$

انتقال بین سیستم‌های زمان-پیوسته و زمان-گسسته

- در بعضی مواقع برای تحلیل راحت‌تر سیستم‌های LTI زمان پیوسته، لازم است که آنها را به صورت زمان گسسته نمایش دهیم و برای این منظور لازم است بدانیم که چگونه می‌توان یک سیستم زمان پیوسته را به یک سیستم زمان گسسته تبدیل کرد.
- در اینجا برای استخراج یک سیستم زمان گسسته از سیستم زمان پیوسته، سه روش را ارائه خواهیم کرد:
 - پاسخ ضربه پایا
 - تفاضل برگشتی
 - انتقال دوسویه

• تفاضل برگشتی

– یکی از روش‌های جایگزین کردن یک سیستم پیوسته با یک سیستم گسسته، این است که مشتقات ظاهر شده در معادلات توصیف کننده یک سیستم پیوسته را با معادلات تفاضلی تقریب بزنیم.

– این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

– $x(t)$ را با $x[n]$ جایگزین می‌کنیم و $y(t)$ را با $y[n]$ جایگزین می‌کنیم.

$$\Delta^1 y[n] = \frac{y[n] - y[n-1]}{T}$$

$$\frac{y[n] - y[n-1]}{T} + ay[n] = x[n]$$

- اگر T به اندازه کافی کوچک انتخاب شود، تقریب گسسته فوق می‌توان تقریب مناسبی برای سیستم پیوسته باشد.

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \Rightarrow H_c(s) = \frac{1}{s + a}$$

$$\left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right) Y(z) + aY(z) = X(z) \Rightarrow H_d(z) = \frac{1}{\left(\frac{1 - z^{-1}}{T} \right) + a}$$

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=(1-z^{-1})/T}$$

- در این نوع تبدیل، برای مشتقات بالاتر می توان نوشت:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy(t)}{dt} \right]$$

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)} y[n] &= \Delta^{(1)} (\Delta^{(1)} y[n]) \\ &= \frac{y[n] - y[n-1]}{T} - \frac{y[n-1] - y[n-2]}{T} \\ &= \frac{y[n] - 2y[n-1] + y[n-2]}{T^2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{d^2 y(t)}{dt^2}\right\} &= s^2 Y(s) \\ \mathcal{Z}\left\{\Delta^{(2)} Y[n]\right\} &= \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^2 Y(z) \end{aligned} \right\} s = \frac{1-z^{-1}}{T}$$

- با این تبدیل، یک سیستم گویا در حوزه s به یک سیستم گویا در حوزه z تبدیل خواهد شد.
- حال عکس این حالت را در نظر می‌گیریم،

$$z = \frac{1}{1-sT}, \quad sT = \sigma + j\omega$$

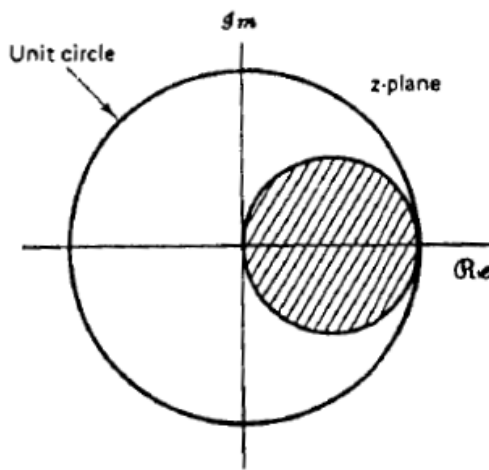
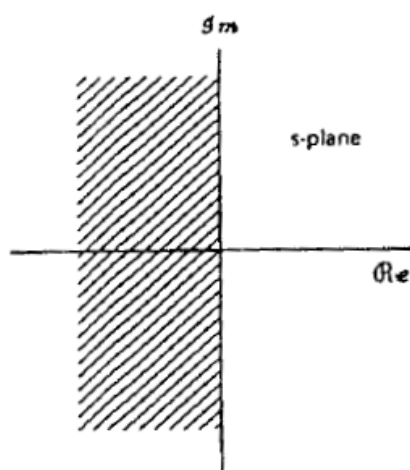
$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\sigma)^2 + \omega^2}} \quad \text{if } \sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1$$

- این نشان می‌دهد که اگر سیستم پیوسته پایدار باشد، سیستم گسسته نیز پایدار خواهد بود. زیرا سمت چپ محور $j\omega$ به داخل دایره واحد نگاشته می‌شود.
- همانطور که قبلاً اشاره شد، پاسخ فرکانسی سیستم گسسته با در نظر گرفتن $H_d(z)$ روی دایره واحد و پاسخ فرکانسی سیستم پیوسته با در نظر گرفتن $H_c(s)$ روی محور $j\omega$ بررسی می‌شود. بنابراین این انتظار وجود دارد که محور $j\omega$ روی دایره واحد نگاشته شود.

- حال این موضوع را بررسی می کنیم

$$z = \frac{1}{1 - j\omega T} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 + j\omega T}{1 - j\omega T} \right] = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e^{j\alpha}}{e^{-j\alpha}} \right] = \frac{1}{2} [1 + e^{j2\alpha}], \alpha = \tan^{-1}(\omega T)$$

- با توجه به اینکه ω از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می کند زاویه 2α از $-\pi$ تا $+\pi$ ، تغییر خواهد کرد و در نتیجه دایره های با شعاع $1/2$ و مرکز $1/2$ در صفحه z حاصل خواهد شد.



- با توجه به شکل، تنها برای فرکانس‌های خیلی پایین، یعنی خیلی کوچکتر از نرخ نمونه‌برداری ($\omega \ll \frac{1}{T}$)، $|z|$ نزدیک دایره واحد قرار خواهد گرفت.

• انتقال دوسویه

- در این روش، از یک تبدیل دیگر برای انتقال از صفحه S به صفحه Z و برعکس کمک می‌گیریم. این تبدیل به شکل زیر می‌باشد،

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s}$$

$$H_d(z) = H_c(s) \Big|_{s=(T/2) \left[(1-z^{-1}) / (1+z^{-1}) \right]}$$

$$z = \frac{[1 + (T/2)\sigma] + j\omega T/2}{[1 - (T/2)\sigma] - j\omega T/2} \quad \begin{array}{l} \text{if } \sigma < 0 \Rightarrow |z| < 1 \\ \text{if } \sigma > 0 \Rightarrow |z| > 1 \end{array}$$

- این روابط نشان می‌دهد که نیم‌صفحه چپ صفحه S به داخل دایره واحد در صفحه Z و نیم‌صفحه راست صفحه S به بیرون دایره واحد در صفحه Z نگاشت پیدا می‌کند. به عبارت دیگر با این تبدیل یک سیستم پیوسته پایدار به یک سیستم گسسته پایدار تبدیل خواهد شد.

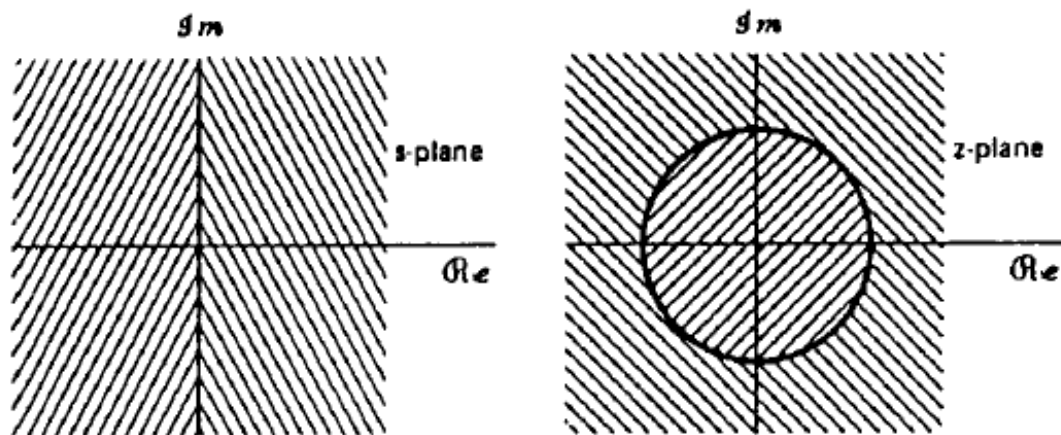
- حال $z = e^{j\Omega}$ را که نشان دهنده دایره واحد می باشد را در نظر بگیرید.

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 + e^{-j\Omega}} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

- این نشان می دهد که دایره واحد در صفحه Z به محور موهومی در صفحه S نگاشته می شود.

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right)$$

$$\Omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



تبدیل Z یک طرفه

- آنچه تا اینجا تحت عنوان تبدیل Z مورد بررسی قرار گرفت، تبدیل Z دوطرفه بود. در ادامه به بیان تبدیل Z یک طرفه خواهیم پرداخت. این تبدیل Z نقش مهمی در تحلیل سیستم‌های علی توصیف شده با یک معادله تفاضلی خطی ضریب ثابت با شرایط اولیه دارد.
- این نوع تبدیل Z به شکل زیر بیان می‌گردد:

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{\Delta + \infty} x[n]z^{-n}$$

- بنابر چهارمین خاصیت بیان شده در مورد ROC، ناحیه همگرایی این نوع تبدیل Z، همواره شامل بیرون دایره واحد در صفحه Z خواهد بود.

$$x[n] = a^n u[n]$$

• مثال:

– حال با توجه به اینکه مقدار سیگنال برای $n < 0$ برابر صفر می باشد، تبدیل Z سیگنال و تبدیل یک طرفه آن با هم برابر خواهد بود.

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

• مثال:

$$x[n] = a^{n+1} u[n+1]$$

تبدیل Z یک سویه

$$\tilde{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{n+1} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a (a^{-1} z)^{-n}$$

$$= \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

تبدیل Z دوسویه

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

خواص تبدیل Z یک طرفه

- تعداد زیادی از خواص تبدیل Z یک طرفه مشابه خواص تبدیل Z دوطرفه می باشد.
- مهم ترین تفاوت بین خواص تبدیل Z یک طرفه و دوطرفه، در خاصیت انتقال می باشد.

$$y[n] = x[n - 1]$$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n - 1]z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n - 1]z^{-n} \\ &= x[-1] + \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-(n+1)} = x[-1] + z^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= x[-1] + z^{-1}\tilde{X}(z)\end{aligned}$$

- به همین ترتیب داشت:

$$w[n] = x[n - 2]$$

$$\tilde{W}(z) = x[-2] + x[-1]z^{-1} + z^{-2}\tilde{X}(z)$$

- کاربرد ابتدایی تبدیل z یک طرفه، بدست آوردن حل یک معادله تفاضلی با شرایط اولیه غیر صفر می باشد.

$$x[n] = u[n] \quad y[-1] = 1$$

- مثال:

$$\tilde{Y}(z) + 3(1 + z^{-1}\tilde{Y}(z)) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$(1 + 3z^{-1})\tilde{Y}(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} - 3 \quad \tilde{Y}(z) = \left(\frac{1}{(1 - z^{-1})(1 + 3z^{-1})} \right) - \left(\frac{3}{1 + 3z^{-1}} \right)$$

Lec. 6

$$\tilde{Y}(z) = -\frac{\frac{9}{4}}{(1+3z^{-1})} + \frac{\frac{1}{4}}{(1-z^{-1})}$$

$$Y[n] = \left[\frac{1}{4} - \frac{9}{4}(-3)^n \right] u[n]$$

The End

